CHAPITRE III : Travail et énergie

En principe, les lois de Newton permettent de résoudre tous les problèmes de la mécanique classique. Si on connaît les positions et les vitesses initiales des particules d'un système ainsi que toutes les forces agissant sur elles, on peut prévoir l'évolution du système au cours du temps. Mais dans la pratique, on ne connaît pas toujours toutes les forces qui entrent en jeu et même si c'est le cas, les équations à résoudre sont trop nombreuses ou trop complexes. Dans bien des cas des informations intéressantes, concernant le système, peuvent être obtenues plus simplement en faisant appel à des notions telles que le travail et l'énergie.

III.1 : Le travail effectué par une force constante

Dans le langage courant, on parle de travail intellectuel, de travail physique, de travail scientifique, artistique, etc… Les physiciens et les ingénieurs s'intéressent, quant à eux, au travail mécanique, c'est-à-dire au travail effectué par une force. Cette notion est en partie liée à la notion commune d'effort musculaire qu'il faut fournir pour déplacer le point d'application d'une force. Tout d'abord, nous allons voir comment, dans le cas particulier d'une force constante $\overline{\mathrm{F}}$ qui déplace un objet sur une distance d. Dans ce cas, le travail mécanique W effectué par la force $\overline{\mathrm{F}}$ est défini comme :

$$\boxed{\mathbf{W} \equiv \mathbf{F\ d\ cos}\ \boldsymbol{\theta}\ \text{, pour une force constante}} \qquad \text{(III.1)}$$

où θ est l'angle entre la force $\overline{\mathrm{F}}$ et le déplacement $\overline{\mathrm{d}}$ (voir figure III.1).

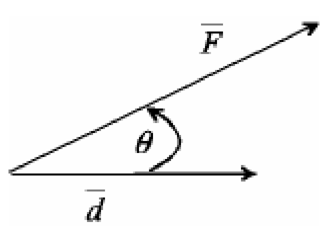


Figure III.1.

Il semble aller de soi que l'effort musculaire requis pour lever un objet dépende à la fois de son poids (la force pesanteur qui s'exerce sur lui), et de la hauteur h à laquelle on l'élève.

Dans ce cas la force est dirigée vers le bas, le déplacement vers le haut et θ vaut 180°. Dès lors : $W = - P.h = - mgh$. Le travail de la force est négatif puisqu'il faut fournir un travail musculaire contre la force pesanteur.

Si un objet est suspendu à un rail horizontal sur lequel il peut glisser sans frottements, une fois qu'on lui a donné une vitesse initiale, il continuera de se déplacer à cette même vitesse (1ère loi de Newton : (II.2)). Il ne faut fournir aucun effort musculaire pour que l'objet se déplace. Effectivement, avec la définition du travail ci-dessus, le travail est nul car force et déplacement sont perpendiculaires et l'angle θ vaut 90°.

Il apparaît donc que la composante d'une force perpendiculaire au déplacement ne contribue pas au travail, seule la composante qui a la même direction que le déplacement contribue. C'est pourquoi c'est la projection de $\overline{F}$ sur le déplacement, soit $F \cos \theta$, qui intervient dans la définition III.1 du travail.

La comparaison de la définition du travail mécanique avec l'effort musculaire a ses limites. Par exemple pour maintenir dans sa main un objet à une hauteur fixe, le déplacement est nul, donc le travail mécanique est nul. Par contre le travail musculaire n'est pas nul.

La définition (III.1) peut s'écrire de manière plus concise en utilisant la notion de produit scalaire de deux vecteurs :

$$\boxed{\mathbf{W \equiv \overline{F} \,.\, \overline{d}}\textbf{, pour une force constante}} \qquad \text{(III.2)}$$

On remarquera que le travail est une quantité scalaire, contrairement à la force et au déplacement qui sont des vecteurs.

III.2 : Le travail effectué par une force variable

Dans le cas où la force varie en intensité et/ou en direction, lors du déplacement, et que celui-ci a une forme quelconque, il faut faire appel au calcul intégral pour généraliser la définition du travail donné en III.2.

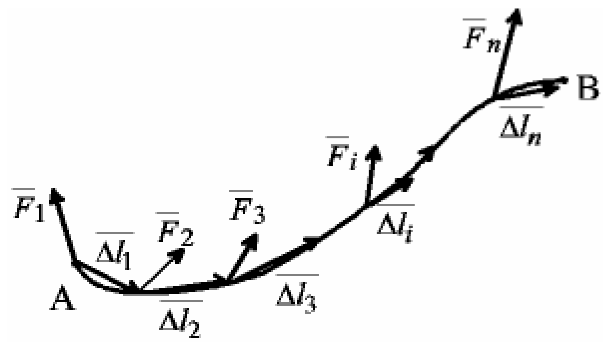


Figure III.2.

Soit la courbe AB suivant laquelle s'effectue le déplacement (voir figure III.2). Ce déplacement peut être subdivisé en n petits déplacements $\overline{\Delta l_1}$, $\overline{\Delta l_2}$, …, $\overline{\Delta l_n}$, suffisamment petits pour qu'en première approximation on puisse considérer que la force $\overline{F_i}$ reste constante lors du déplacement $\overline{\Delta l_i}$. Dès lors le travail W effectué par la force $\overline{F}$, entre A et B, est donné en première approximation par :

$$\mathbf{W \approx \overline{F}_1 \cdot \overline{\Delta l_1} + \overline{F}_2 \cdot \overline{\Delta l_2} + \ldots + \overline{F}_n \cdot \overline{\Delta l_n}}$$

$$\mathbf{= \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \cdot \overline{\Delta l_i}}$$

L'approximation sera d'autant meilleure que les $\overline{\Delta l_i}$ sont petits et donc nombreux. La valeur exacte du travail sera obtenue à la limite où les $\overline{\Delta l_i}$ tendent vers zéro et n vers l'infini :

$$\mathbf{W = \lim_{\substack{\overline{\Delta l_i} \to \overline{0} \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \cdot \overline{\Delta l_i}}$$

Ce qui par définition est l'intégrale curviligne de la force $\overline{F}$, le long de la trajectoire AB :

$$\boxed{\mathbf{W \equiv \int_A^B \overline{F} \cdot \overline{dl}}} \qquad \text{(III.3)}$$

où $\overline{dl}$ est un déplacement infinitésimal le long de la trajectoire, c'est-à-dire tangent à celle-ci (voir figure III.3).

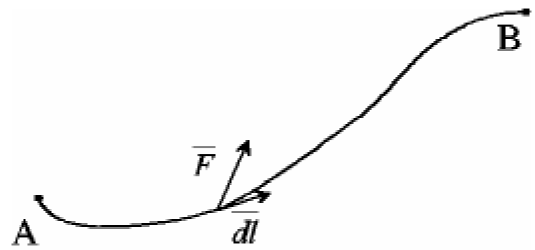


Figure III.3.

L’unité de travail du SI est le joule (J).

D’après la relation (III.1) :

$$\mathbf{1J = 1N.1m}$$

Un travail d'un joule correspond au travail fourni par une force de 1 newton qui déplace son point d'application d'un mètre dans sa propre direction.

III.3 : L’énergie cinétique et son théorème

Le concept d’énergie est l’un des plus importants en sciences. Pourtant c’est un concept difficile à définir de manière générale. En effet, il existe différents types d’énergie : mécanique, électrique, chimique, thermique, etc … qui se définissent chacune séparément. Ces différentes formes d'énergie peuvent se transformer les unes dans les autres. Dans un système isolé du monde extérieur, dit fermé, la somme de ces différentes formes d'énergie, appelée énergie totale du système, reste constante du début à la fin de n'importe quelle transformation. On dit que l’énergie totale d’un système fermé, est conservée. Les différentes formes d’énergie sont donc définies de manière à satisfaire à ce principe de conservation.

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l’énergie cinétique d’un objet ponctuel qui est l’énergie que celui-ci acquiert de par sa vitesse. Dans ce cas-ci on peut définir l’énergie comme la capacité à exécuter un certain travail : une automobile lancée à faible vitesse contre une caisse posée sur le sol, va mettre cette caisse en mouvement et perdre sa propre vitesse. Pour mettre la caisse en mouvement il faut s’opposer aux forces de frottements qui existent entre la caisse et le sol. Il faut déplacer le point d'application de ces forces et donc effectuer un travail. Réciproquement, pour faire acquérir de la vitesse à un objet, et donc lui procurer de l’énergie cinétique, il faut effectuer un travail. Il y a donc un lien étroit entre les concepts de travail et d’énergie. Travail et énergie se mesurent avec les mêmes unités.

Voyons tout d'abord comment définir l'énergie cinétique d'un objet ponctuel de masse m dans le cas où celui-ci a un MRUA d'accélération a_0, sous l'effet d'une force constante $\overline{F}$. Supposons que la vitesse initiale de l'objet soit $\overline{v}_0$ et que la force $\overline{F}$ soit appliquée dans le sens de $\overline{v}_0$ et produise un déplacement $\overline{d}$. Dans ce cas, force et déplacement ont même sens et :

$$\mathbf{W = \overline{F}\ .\ \overline{d} = F\ d = m\ a_0\ d} \qquad \text{(III.4)}$$

D'après (I.11), on a :

$$\mathbf{a_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2d}},$$

où on a posé d = $|x - x_0|$ et v est la vitesse à la fin du déplacement d. En remplaçant dans (III.4), on obtient :

$$\mathbf{W = m\frac{v^2 - v_0^2}{2} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2} \qquad \text{(III.5)}$$

La quantité $\frac{1}{2}mv^2$, qui apparaît dans l'expression ci-dessus, se définit comme l'énergie cinétique K de la masse ponctuelle m :

$$\boxed{\mathbf{K \equiv \frac{1}{2}mv^2}} \qquad \text{(III.6)}$$

Dès lors, la relation III.5 peut s'écrire :

$$\boxed{\mathbf{W = \Delta K}} \qquad \text{(III.7)}$$

qui exprime le fait que le travail effectué sur une masse ponctuelle est égal à la variation de son énergie cinétique. Il s'agit en fait du théorème de l'énergie cinétique.

Le théorème de l'énergie cinétique, exprimé sous la forme (III.7), reste valable dans le cas d'une force variable et pour une trajectoire quelconque. En effet, dans ce cas, la définition du travail de la force $\overline{F}$, devient :

$$\mathbf{W = \int_A^B \overline{F}\,.\,\overline{dl} = \int_A^B F_t\ \ dl}\ , \qquad \text{(III.8)}$$

où F_t est la composante de la force tangente à la trajectoire. La deuxième loi de Newton nous donne :

$$\mathbf{F_t = m\,a_t = m\,\frac{dv}{dt}}$$ voir relation (I.20))

$$\mathbf{= m\,\frac{dv}{dl}\cdot\frac{dl}{dt} = m\,\frac{dv}{dl}\,v} \qquad \text{(III.9)}$$

En combinant (III.8) et (III.9), on obtient :

$$\mathbf{W = \int_A^B mv\,\frac{dv}{dl}\,dl = \int_A^B mv\,dv = \left[\frac{1}{2}mv^2\right]_A^B = \Delta K}\ .$$

Nous avons donc **le théorème de l'énergie cinétique** qui s'exprime dans le cas général par :

$$\boxed{\mathbf{\int_A^B \overline{F}\,.\,\overline{dl} = \left[\frac{1}{2}mv^2\right]_A^B}} \qquad \text{(III.10)}$$

Il dit que le travail effectué par une force $\overline{F}$ pour déplacer une masse m le long d'une trajectoire allant d'un point A à un point B est égal à la variation d'énergie cinétique de cette masse entre les points A et B.

III.4 : L'énergie potentielle

Alors que l'énergie cinétique d'une particule est associée à son mouvement, nous allons voir maintenant une autre forme d'énergie qui est associée à sa position. C'est pourquoi on l'appelle énergie potentielle.

Pour se rendre compte de l'existence de cette autre forme d'énergie mécanique, prenons l'exemple d'un objet de masse m lancé en l'air verticalement avec une vitesse initiale v_0. L'objet va ralentir et sa vitesse va finalement s'annuler. La relation (I.11) permet de calculer la hauteur h à laquelle cette vitesse s'annule en posant $x - x_0 = h$ et $a_0 = -g$:

$$\mathbf{h = \frac{0 - v_0^2}{-2g} = \frac{v_0^2}{2g}}$$

Le signe – pour l'accélération résulte de ce que le déplacement est dirigé vers le haut et l'accélération de la pesanteur, vers le bas. Ensuite l'objet va retomber sur le sol et sa vitesse va augmenter à nouveau pour atteindre la valeur suivante à son arrivée au point de lancement :

$v_f^2 = 0 + 2gh = v_0^2$ (cette fois, déplacement et accélération ont le même sens). A son retour au point de départ l'objet a la même énergie cinétique qu'à l'instant initial :

$$\mathbf{K_f = \frac{1}{2} m\, v_f^2 = \frac{1}{2} m\, v_0^2 = K_0}.$$

Par contre au sommet de la trajectoire, l'énergie cinétique a disparu momentanément, pour réapparaître progressivement lors de la chute. On suppose que l'énergie cinétique s'est transformée en une autre forme d'énergie, et que la somme de ces deux formes d'énergie, appelée énergie mécanique, est restée constante pendant tout le mouvement. Clairement, dans l'exemple choisi, cette nouvelle forme d'énergie est liée à la hauteur de l'objet et donc à sa position. En effet pour une hauteur donnée h' < h, la vitesse de l'objet est la même à la montée et à la descente :

$$\mathbf{v_m^2 = v_0^2 - 2gh'}, \qquad \text{à la montée}$$

$$\mathbf{v_0^2 = v_d^2 + 2gh'}, \qquad \text{à la descente}$$

Si on admet l'idée de la valeur constante de l'énergie mécanique, une même énergie cinétique à une hauteur h', implique une même énergie potentielle.

On va donc définir l'énergie potentielle U comme étant la quantité qu'il faut ajouter à l'énergie cinétique K, pour que leur somme reste constante :

$$\boxed{\mathbf{K + U = constante}} \qquad \text{(III.11)}$$

Dès lors, pour un déplacement produisant une variation d'énergie cinétique ΔK, la variation correspondante d'énergie potentielle, ΔU est donnée par :

$$\mathbf{\Delta U_A^B = U(B) - U(A) \equiv -\Delta K = -W = -\int_A^B \overline{F} \,.\, \overline{dl}},$$

en utilisant les relation III.7et III.3. La différence d'énergie potentielle entre les points A et B est donc donnée par :

$$\boxed{\mathbf{U(B) - U(A) \equiv -\int_A^B \overline{F} \,.\, \overline{dl}}} \qquad \text{(III.12)}$$

Cette relation ne définit que la différence d'énergie potentielle. L'énergie potentielle est donc définie à une constante près, que l'on choisit arbitrairement.

III.5 : L'énergie potentielle de la force pesanteur

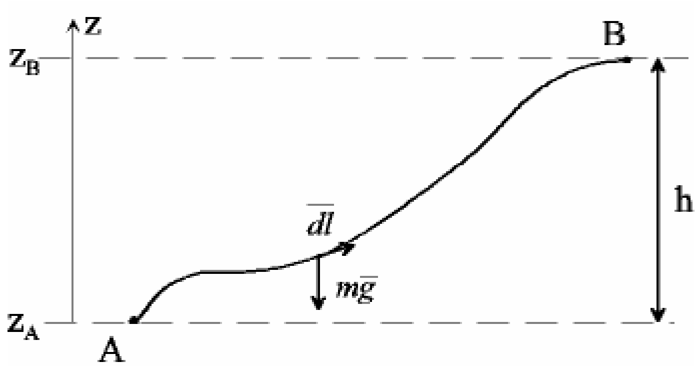


Figure III.4.

En utilisant la définition III.12, la différence d'énergie potentielle entre les points A et B, situés au voisinage de la terre (voir figure III.4), est donnée par

$$\mathbf{U(B) - U(A) = -\int_A^B m\overline{g}\,.\,\overline{dl} = -\int_{z_A}^{z_B} (-mg)\,.\,dz} \qquad \text{(III.13)}$$

En effet, le produit scalaire de deux vecteurs $\overline{A}$ et $\overline{B}$ est donné par la somme des produits de leurs composantes suivant trois axes de coordonnées cartésiennes :

$$\mathbf{\overline{A}\,.\,\overline{B} = A_x\,B_x + A_y\,B_y + A_z\,B_z} \qquad \text{(III.14)}$$

et les coordonnées du vecteur $m\overline{g}$ sont : 0,0 et –mg, celles de $\overline{dl}$: dx, dy et dz, l'axe Oz étant dirigé vers le haut.

Le calcul de l'intégrale (III.13) donne :

$$\mathbf{U(B) - U(A) = mg(z_B - z_A) = mgh}$$

Par conséquent, la différence d'énergie potentielle due à la force pesanteur est donnée par :

$$\boxed{\mathbf{\Delta U_g = mgh}\ ,} \qquad \text{(III.15)}$$

où h est la différence de hauteur entre les deux points considérés. On voit que la position des points A et B dans un plan horizontal, ne joue pas, seule la hauteur du plan compte : tous les points d'un plan horizontal à hauteur constante, ont même énergie potentielle. Dans le cas de la force pesanteur, on choisit le plus souvent le niveau du sol comme niveau de référence : U_g (sol) = 0. Dès lors, à une hauteur h au-dessus du sol U_g (h) = mgh.

III.6 : Les forces conservatives et non conservatives

La différence d'énergie potentielle, telle qu'elle est définie par la relation (III.12), existe-t-elle pour toutes les forces ? La réponse est non. Seules les forces d'un type particulier, dites conservatives, permettent de leur associer une énergie potentielle.

En effet, si l'énergie potentielle ne dépend que de la position, la variation d'énergie potentielle pour tout déplacement le long d'un circuit fermé, qui revient à son point de départ doit être nulle (voir figure III.5).

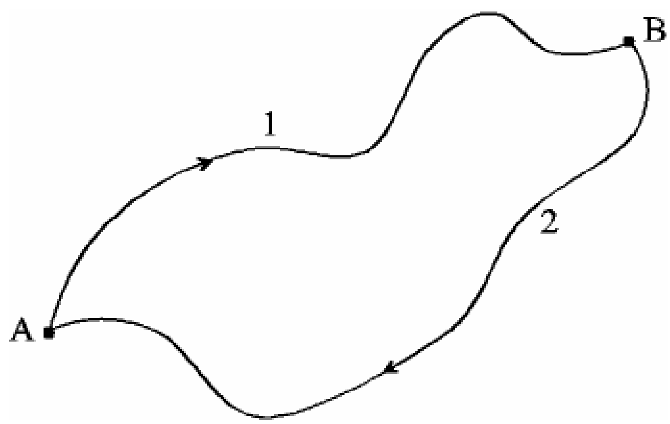


Figure III.5.

$$\mathbf{U(A) - U(A) = -\int_{A\ sur\ 1}^{B} \overline{F}\,.\,\overline{dl} \;-\; \int_{B\ sur\ 2}^{A} \overline{F}\,.\,\overline{dl} = 0} \qquad \text{(III.16)}$$

Cette condition à l'existence d'une énergie potentielle peut encore s'exprimer en disant que le travail de la force entre A et B, ne peut dépendre du chemin suivi pour aller de A à B :

$$\mathbf{\int_{A\ sur\ 2}^{B} \overline{F}\,.\,\overline{dl} = -\int_{B\ sur\ 2}^{A} \overline{F}\,.\,\overline{dl} = \int_{A\ sur\ 1}^{B} \overline{F}\,.\,\overline{dl}}\text{, d'après (III.16)}$$

Les forces dont le travail entre deux points ne dépend pas du chemin suivi sont dites conservatives, les autres non conservatives. Cette terminologie résulte de ce que pour une force conservative, une énergie potentielle peut être définie et l'énergie mécanique, somme de cette énergie potentielle et de l’énergie cinétique, est constante : il y a conservation de l’énergie mécanique. Pour les forces non conservatives il n’est pas possible de définir une énergie mécanique qui est conservée au cours du mouvement. Dans ce cas, d'autres formes d'énergie interviennent dans l'énergie totale.

La force pesanteur et la force gravitationnelle sont des forces conservatives. C’est le cas de toutes les forces qui ne dépendent pas de la vitesse. Un exemple typique de force non conservative est donné par les forces de frottements. Ces dernières tendent toujours à ralentir le mouvement et sont donc toujours de sens opposé à la vitesse. Comme $\overline{dl} = \overline{v}\, dt$,

$$\mathbf{dW = \overline{F} \,.\, \overline{dl} = \overline{F} \,.\, \overline{v}\, dt < 0}\,.$$

Et $W_{AB} = \int_A^B dW < 0$, de même que $\int_B^A dW < 0$.

Sur le chemin de retour, la force change de sens de même que la vitesse. Dès lors le travail d’une force de frottement sur un circuit fermé est toujours strictement négatif. L'énergie mécanique dissipée par les forces de frottement se retrouve sous forme d'énergie thermique due à l'échauffement des surfaces en contact.

III.7 : La puissance

Dans les applications industrielles de la physique, il ne suffit pas de savoir quelle quantité de travail un moteur peut fournir, il est aussi primordial de savoir combien de temps il lui faudra pour effectuer ce travail. La puissance est une grandeur qui mesure le taux de travail ; elle est définie comme étant une quantité de travail par unité de temps. Pour une quantité de travail ΔW fournie pendant un intervalle de temps Δt, on définit la puissance moyenne par :

$$\mathbf{P_m \equiv \frac{\Delta W}{\Delta t}}\,. \tag{III.17}$$

La puissance instantanée est obtenue en passant à la limite $\Delta t \to 0$:

$$\boxed{\mathbf{P \equiv \frac{dW}{dt}}\,.} \tag{III.18}$$

L'unité SI de puissance est le watt (W) ; il vaut :

$$\mathbf{1W = 1J/1s.}$$

Le watt est la puissance qu'il faut développer pour fournir un travail d'un joule en une seconde.

Il peut parfois être utile de relier la puissance instantanée à la force appliquée $\overline{\mathrm{F}}$ et à la vitesse $\overline{\mathrm{v}}$:

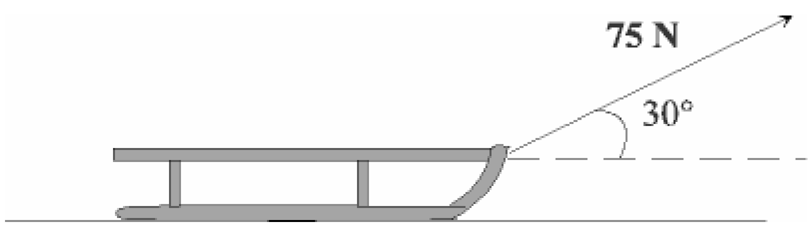
$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{dW}}{\mathbf{dt}} = \frac{\overline{\mathbf{F}}\,.\,\overline{\mathbf{dl}}}{\mathbf{dt}} = \overline{\mathbf{F}}\,.\,\overline{\mathbf{v}}\,. \qquad \text{(III.19)}$$

Donc :

$$\boxed{\mathbf{P} = \overline{\mathbf{F}}\,.\,\overline{\mathbf{v}}}\quad . \qquad \text{(III.20)}$$

III.8 : Exercices

1. Pour tirer un traîneau sur une surface horizontale, on exerce une traction de 75 N avec un angle de 30° par rapport à l'horizontale.
   Trouver le travail accompli quand le traîneau parcourt 8 m.
   (R : 520 J).



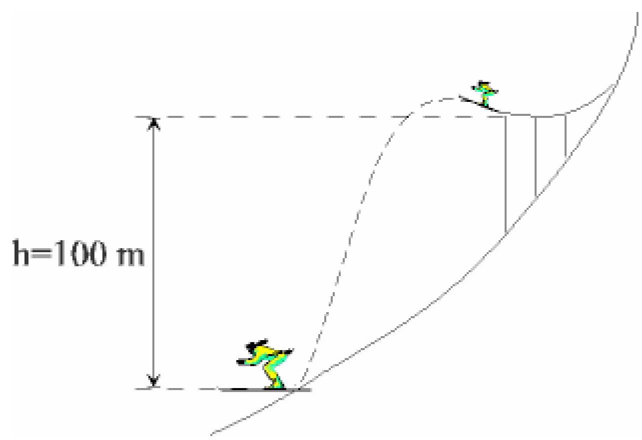
2. Un objet de masse m, initialement immobile, est accéléré par une force constante F. Que vaut son énergie cinétique après un déplacement L ? (R : FL).

3. Une voiture de 1000 kg dispose d'une force de freinage maximum égale à 5000 N
   a) Exprimer sa distance d'arrêt minimum en fonction de sa vitesse ? (R : 0,1 v^2 en unités S.I.).
   b) Quelle est la puissance maximum développée par les freins si la vitesse initiale de la voiture est de 108 km/h ? (R : 150 kW).

4. On enfonce un clou à l'aide d'un marteau de 500 g. La vitesse du marteau juste avant de frapper le clou est de 5 m/s. Le clou s'enfonce de 5 mm. Quelle est la force exercée sur le clou en supposant qu'elle est constante ? (R : 1250 N).

5. Un skieur lancé à une vitesse de 50 m/s quitte un tremplin de saut avec un angle par rapport à l'horizontale inconnu et atterrit en un point dont la distance verticale au tremplin est de 100 m (voir figure).

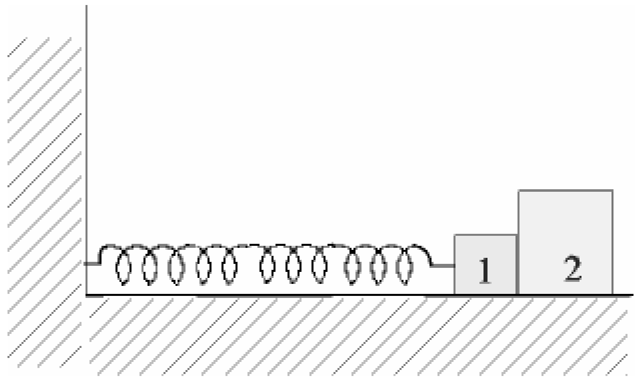
   Quelle est sa vitesse juste avant l'atterrissage si on peut négliger le frottement de l'air ? (R : 67 m/s).



6. Un bateau pompier aspire l'eau d'une rivière et la déverse dans un réservoir placé 3,5 m plus haut par un tuyau de 4 cm de diamètre. L'eau supposée au repos dans la rivière est éjectée dans le réservoir avec une vitesse de 60 m/s. (N.B. La masse volumique de l'eau vaut 10^3 kg/m^3).

   Trouver la puissance développée par la pompe. (R : 138 kW).

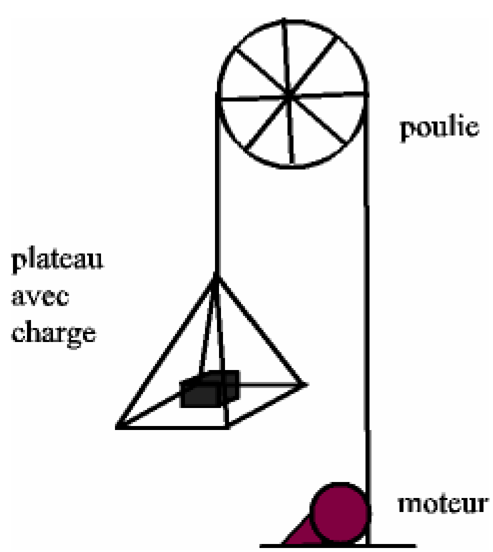
7.



Pour comprimer un ressort d'une longueur d, il faut exercer une force $F = kd$ où k est la constante de rappel. Un ressort de constante de rappel $k = 10^4$ N/m est fixé à un mur par une extrémité. A l'autre extrémité est attaché le cube 1 de masse $m_1 = 0{,}3$ kg. A l'aide d'un second cube de masse $m_2 = 0{,}6$ kg, on comprime le ressort de 2 cm. Ensuite on le lâche. On suppose les frottements négligeables et les cubes ne collent pas l'un à l'autre.On demande :

a) La force de compression du ressort quand il est comprimé de 2 cm. (R : 200 N)
b) L'énergie emmagasinée dans le ressort à ce moment. (R : 2 J)
c) La vitesse du cube 2 quand il aura quitté le cube 1 c'est-à-dire lorsque le ressort aura retrouvé sa longueur d'équilibre (= longueur de ressort non comprimé). (R : 2,1 m/s).

8. Question d'examen (août 2004) : Un monte-charge consiste en un plateau sur lequel la charge est installée. Ce plateau est suspendu à un câble, qui passe sur une poulie et est actionné par un moteur.



a. Quel travail le monte-charge effectue-t-il lorsqu'il monte une charge de 60 kg, comprenant la masse du plateau et de ses accessoires, d'une hauteur de 3 m ?
b. Quelle doit être la puissance minimum du moteur pour effectuer ce travail en 1 minute ?
c. Sachant que la poulie a un rayon de 25 cm quelle doit être la vitesse angulaire de la poulie pour effectuer ce travail en 1 minute ?
d. Lorsque la charge est arrivée au sommet de sa trajectoire, le câble casse et la charge retombe sur le sol, 3 m plus bas. Avec quelle vitesse arrive-t-elle sur le sol ?
e. Combien de temps mettra-t-elle pour arriver au sol, en négligeant la résistance de l'air ?
(R: 1800 J ; 30 W ; 0,2 rad/s ; 7,8 m/s ; 0,77 s)