CHAPITRE VI : Le potentiel électrique

Au chapitre III, nous avons vu que lorsqu'une force est conservative, il est possible de lui associer une énergie potentielle qui conduit à une loi de conservation de l'énergie. Nous allons voir que la force de Coulomb entre charges électriques est conservative. On peut par conséquent définir une énergie potentielle électrique, qui dépend de la position des charges électriques, et appliquer la loi de conservation de l'énergie aux problèmes d'électricité.

L'énergie potentielle électrique caractérise un ensemble de charges. En électricité, on préfère souvent travailler avec le potentiel électrique qui caractérise un point de l'espace, tout comme le champ électrique : le champ électrique donne la force de Coulomb par unité de charge en un point donné, le potentiel électrique est défini comme l'énergie potentielle par unité de charge.

VI.1 : La force de Coulomb est conservative

La force de Coulomb qui existe entre deux charges électriques (voir IV. 6)) dépend de la distance r entre les deux charges et est dirigée suivant la ligne qui joint les positions des deux charges. C'est ce qu'on appelle une force centrale. En outre, elle ne dépend d'aucune autre variable cinématique telle que la vitesse, par exemple. La force exercée par la charge q_2 sur la charge q_1 peut donc s'écrire sous la forme :

$$\overline{\mathbf{F}}_{12} = \mathbf{F}(\mathbf{r})\, \overline{\mathbf{1}}_{\mathbf{r}} \qquad \text{(VI.1)}$$

où

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad \text{(VI.2)}$$

et $\overline{1}_r$ est un vecteur de longueur unité, dirigé suivant la ligne qui joint les positions des charges q_1 et q_2, dirigé de q_2 vers q_1.

Pour montrer qu'une telle force est conservative, nous allons montrer que son travail entre deux points quelconques de l'espace, A et B, ne dépend pas du chemin suivi, seulement des positions de départ et d'arrivée (voir figure VI.1).

$$W_{AB} = \int_A^B \overline{F}_{12} \cdot \overline{dl}$$

$$= \int_A^B F(r)\, \overline{1}_r \cdot \overline{dl}$$

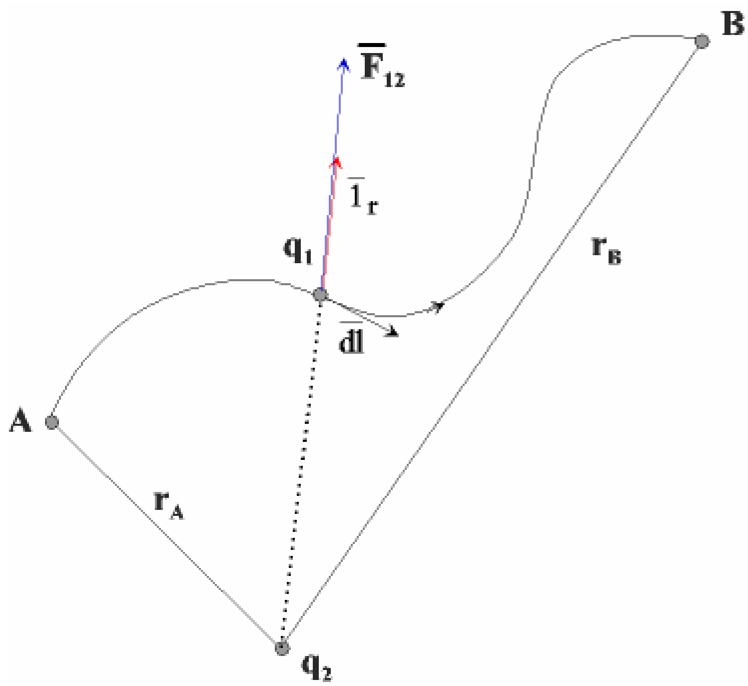


Figure VI.1.

Le vecteur de longueur infinitésimale $\overline{dl}$, tangent à la trajectoire peut être décomposé en un vecteur de longueur infinitésimale $\overline{dr}$, dirigé suivant $\overline{1}_r$ et un vecteur de longueur infinitésimale $\overline{dt_g}$, perpendiculaire à $\overline{1}_r$ (voir figure VI.2) :

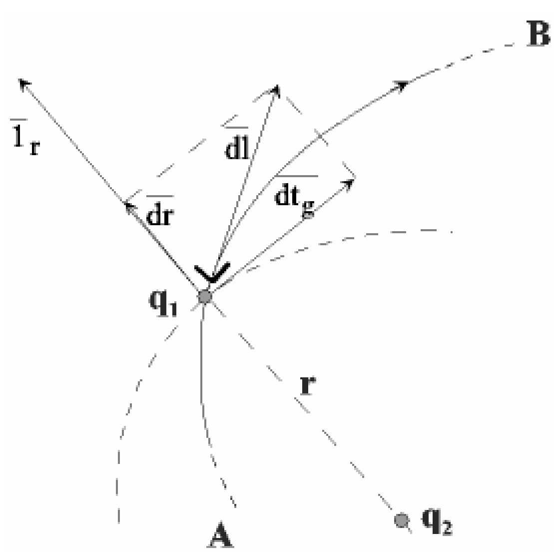


Figure VI.2.

Dès lors le travail de $\overline{F}_{12}$ de A à B devient :

$$\mathbf{W_{AB} = \int_A^B F(r)\,\overline{1}_r\,.\,(\overline{dr} + \overline{dt_g})\; = \int_{r_A}^{r_B} F(r)\,dr} \qquad \text{(VI.3)}$$

où dr est la longueur du vecteur $\overline{dr}$. En effet, $\overline{1}_r\,.\,\overline{dt_g} = 0$ car $\overline{dt}_g$ est perpendiculaire à $\overline{1}_r$ et $\overline{1}_r\,.\,\overline{dr} = dr\;\overline{1}_r\,.\,\overline{1}_r = dr$.

L'expression du travail entre A et B ci-dessus (VI.3), se réduit à une intégrale simple dont le résultat ne dépend que de r_A et r_B et pas du chemin particulier pour aller de A à B. Ceci montre que la force de Coulomb est bien conservative, comme toute force centrale qui ne dépend que de r.

VI.2 : L'énergie potentielle électrique

La force électrique étant conservative (voir VI.1), nous pouvons définir l'énergie potentielle de la même manière qu'au chapitre III (voir (III.2)) :

$$\mathbf{\Delta U = U(B) - U(A) = -\int_A^B \overline{F}_E\,.\,\overline{dl}}\,, \qquad \text{(VI.4)}$$

où $\overline{F}_E$ est la résultante des forces électriques dues à un ensemble de charges, qui s'exerceraient sur une charge électrique qui serait déplacée de A à B suivant n'importe quel chemin.

Dans le cas où seules deux charges électriques q_1 et q_2 sont concernées les relations (VI.3) et (VI.2) s'appliquant à la situation décrite par la figure VI.1, permettent d'écrire :

$$\mathbf{\Delta U \;=\; -\frac{q_1\,q_2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2} \;=\; -\frac{q_1\,q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B}}$$

$$\mathbf{= \frac{q_1\,q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)} \qquad \text{(VI.5)}$$

Regardons quel est le contenu physique de la relation (VI.5). Supposons que les charges q_1 et q_2 soient de même signe. La force de Coulomb est alors répulsive. Si $r_A < r_B$, cela veut dire que l'on éloigne les deux charges l'une de l'autre, le travail à fournir est négatif puisque les charges tendent à s'éloigner d'elles-mêmes. Le travail de la force, lui, est positif et la variation d'énergie potentielle est négative. En effet $\frac{1}{r_A} > \frac{1}{r_B}$ et $\Delta U < 0$ (voir VI.5)). Donc U(B) < U(A). Lorsqu'on éloigne deux charges de même signe, leur énergie potentielle électrique diminue. Si on les rapproche, il faut fournir un travail contre la force électrique. Le travail de cette dernière est négatif et l'énergie potentielle électrique augmente, comme pour un rocher que l'on amènerait au sommet d'une montagne.

En répétant le raisonnement ci-dessus dans le cas de deux charges de signes opposés, qui conduisent à une force de Coulomb attractive, on constate que lorsqu'on les éloigne, leur énergie potentielle augmente, lorsqu'on les rapproche, elle diminue, comme pour un rocher qui dévalerait la pente d'une montagne.

Lorsqu'il n'y a pas d'autres forces que la force électrique qui entrent en jeu, la loi de conservation de l'énergie (III.10) nous dit que si les charges gagnent de l'énergie potentielle électrique, elles perdent de l'énergie cinétique : elles ralentissent comme une pierre lancée en l'air; si elles perdent de l'énergie potentielle électrique, elles gagnent de l'énergie cinétique : elles accélèrent, comme une pierre qui tombe.

Nous avons vu au chapitre III qu'une relation telle que (VI.4) définit la différence d'énergie potentielle entre deux points. Pour connaître l'énergie potentielle en un point, il faut choisir arbitrairement la valeur de celle-ci en un point de référence. En électricité, il est souvent commode de choisir comme niveau de référence d'énergie potentielle nulle, l'infini :

$$\lim_{r \to \infty} U(r) \equiv 0 \qquad \text{(VI.6)}$$

Dès lors si dans l'expression (VI.5), on fait tendre $r_A \to \infty$ et $r = r_B$, on obtient :

$$\lim_{r_A \to \infty} \Delta U = U(r) - \lim_{r_A \to \infty} U(r_A) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \lim_{r_A \to \infty} \frac{1}{r_A}\right)$$

Et :

$$\boxed{U(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}} \qquad \text{(VI.7)}$$

La relation (VI.7) ci-dessus donne l'énergie potentielle électrique d'un système de deux charges électriques q_1 et q_2 distantes de r. On remarque qu'elle est positive si les charges q_1 et q_2 sont de même signe, négative si elles sont de signe opposés.

VI.3 : Le potentiel électrique et les différences de potentiel

La force de gravitation universelle, vue au chapitre II (II.7), et la force de Coulomb, vue au chapitre IV (IV. 6) ont la même forme mathématique : toutes deux sont en $1/r^2$; elles dépendent de l'inverse du carré de la distance entre les masses m_1 et m_2 ou entre les charges q_1 et q_2 ; dans la loi de Coulomb, le rôle des masses m_1 et m_2 est joué par les charges q_1 et q_2, celui de la constante de gravitation G par le facteur $1/4\pi\ \varepsilon_0$. Cette similitude a permis de définir une énergie potentielle dans les deux cas et de faire des comparaisons entre situations "mécaniques" et situations "électriques".

Il y a toutefois une différence entre les deux forces : la force gravitationnelle est toujours attractive tandis que la force électrique est tantôt attractive, tantôt répulsive, suivant le signe respectif des charges électriques. Cela a pour conséquence qu'en électricité, l'énergie potentielle électrique n'est pas très pratique à utiliser, car elle change de signe avec le signe de la charge que l'on considère (voir relation VI.7). Voyons ce que cette particularité implique comme complication dans un exemple, celui de deux plaques conductrices parallèles, infinies, distantes de d et chargées de manière uniforme d'électricité de signes contraires (voir figure VI.3).

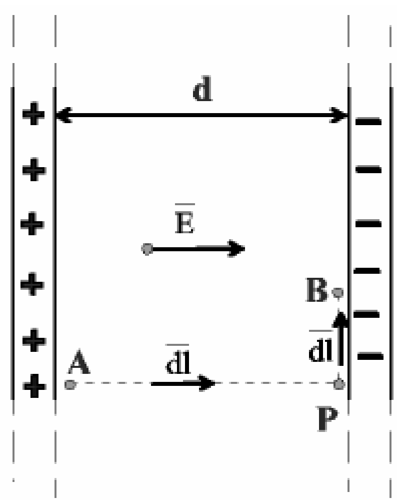


Figure VI.3.

Nous avons vu que dans une telle situation, le champ électrique régnant entre les deux plaques est uniforme, $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ où σ est la charge par unité de surface, et que le champ $\overline{E}$ est perpendiculaire aux plaques, dirigé de la plaque positive vers la plaque négative (voir figure V. 5).

Dès lors, si on place une charge électrique q n'importe où entre les deux plaques elle subit une force électrique $\overline{F} = q\overline{E}$. Supposons qu'on amène cette charge q depuis un point A, situé contre la plaque positive, vers un point B, situé contre la plaque négative. La différence d'énergie potentielle entre ces positions A et B est donnée par :

$$\mathbf{\Delta U = U(B) - U(A) = -\int_A^B \overline{F} \cdot \overline{dl} = -q \int_A^B \overline{E} \cdot \overline{dl}}$$

La force électrique étant conservative, le chemin choisi pour aller de A à B n'importe pas et nous allons le choisir pour faciliter le calcul de l'intégrale ci-dessus, soir AB = AP + PB, où AP est un trajet perpendiculaire aux plaques et PB, parallèle à celles-ci. Le long de AP, $\overline{dl}$ est parallèle à $\overline{E}$ et $\overline{E} \cdot \overline{dl} = E\,dl$, tandis que sur le trajet PB, $\overline{dl}$ est perpendiculaire à $\overline{E}$ et $\overline{E} \cdot \overline{dl} = 0$.

Dès lors :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Delta U} &= \mathbf{-q \int_A^P E\,dl = -q\,E \int_{l_A}^{l_B} dl} \\ &= \mathbf{-q\,E\,(l_B - l_A) = -q\,E\,d} \end{aligned} \qquad \text{(VI.8)}$$

Remarquons tout d'abord que la différence d'énergie potentielle ΔU est la même quel que soit l'endroit où le point A est situé sur la plaque positive et quel que soit l'endroit où B est situé sur la plaque négative : **tous les points d'une plaque sont à la même énergie potentielle**.

Pour une charge positive :

$$q > 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta U < 0 \quad \Rightarrow \quad U(B) < U(A)$$

Pour une charge négative :

$$q < 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta U > 0 \quad \Rightarrow \quad U(B) > U(A).$$

Donc pour une charge positive, c'est en A que l'énergie potentielle est la plus élevée, tandis que pour une charge négative, c'est en B qu'elle est la plus élevée.

Pour éviter ce changement de signe avec la charge q considérée, on travaille plus volontiers avec le potentiel électrique V(r), défini comme étant l'énergie potentielle électrique par unité de charge :

$$\boxed{\mathbf{V(r) \equiv \frac{U(r)}{q}}} \qquad \text{(VI.9)}$$

Le potentiel électrique en un point de l'espace, dû à un ensemble de charges, est égal à l'énergie électrique de cet ensemble de charges auquel on adjoint une petite charge d'essai q, de signe quelconque, située au point considéré, divisée par cette charge q.

De même, la différence de potentiel entre deux points de l'espace est donnée par la différence d'énergie potentielle divisée par la charge :

$$\boxed{\mathbf{\Delta V \equiv \frac{\Delta U}{q}}} \qquad \text{(VI.10)}$$

Appliquons cette notion de potentiel et de différence de potentiel à l'exemple ci-dessus des deux plaques chargées.

Pour une charge positive :

$$q > 0 \Rightarrow \Delta U < 0 \Rightarrow \Delta V = \frac{\Delta U}{q} < 0 \Rightarrow V(B) < V(A)$$

Pour une charge négative :

$$q < 0 \Rightarrow \Delta U > 0 \Rightarrow \Delta V = \frac{\Delta U}{q} < 0 \Rightarrow V(B) < V(A)$$

C'est la plaque positive qui est au potentiel le plus élevé, quelle que soit la charge que l'on envisage de placer entre les plaques.

Il n'en reste pas moins que si on place une charge positive entre les deux plaques, elle va aller du point de potentiel le plus élevé vers le point de potentiel le plus bas, comme une pierre qui tombe d'une montagne. En effet, la force électrique qu'elle subit, $\overline{F} = q\overline{E}$, a même sens que le champ électrique, c'est-à-dire de la plaque positive vers la plaque négative (voir figure VI.3). Une charge négative, quant à elle, va aller du point de potentiel le plus bas vers le point de potentiel le plus haut. En effet, la force électrique qu'elle subit, $\overline{F} = q\overline{E}$, est de sens opposé à $\overline{E}$ et est donc dirigée de la plaque négative vers la plaque positive.

Le comportement de la charge négative est comme le serait celui d'un objet de masse négative, s'il en existait, ou celui d'un trou dans le sol qui se comblerait par la chute de roches depuis le sommet d'une montagne. La chute des roches crée un trou au sommet de la montagne et fait disparaître le trou au pied de la montagne : le trou, considéré comme un objet, de masse négative, a remonté la pente de la montagne !

En fait, la notion de potentiel électrique a l'avantage de caractériser de manière unique un point de l'espace par rapport aux charges qui l'entourent, sans qu'il soit besoin d'y placer une charge, tout comme le champ électrique est défini en un point de l'espace sans qu'il y ait nécessairement une charge à cet endroit. Mais attention, le champ électrique est une quantité vectorielle alors que le potentiel électrique est une quantité scalaire.

L'unité d'énergie potentielle électrique du SI est la même que celle de l'énergie potentielle mécanique et que celle du travail, soit le joule (voir III.2). L'unité de potentiel électrique du SI est le volt (V) :

$$\mathbf{1V \equiv 1\ J/C} \qquad \text{(VI.11)}$$

VI.4 : La relation entre le potentiel et le champ électrique

A partir des relations (VI.4) et (VI.10), on établit aisément la relation qui existe entre potentiel et champ électrique :

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = \frac{-\int_A^B \overline{F}_E \cdot \overline{dl}}{q} = \frac{-\int_A^B (q\,\overline{E}) \cdot \overline{dl}}{q}$$

D'où l'on tire :

$$\Delta V = V(B) - V(A) = -\int_A^B \overline{E} \cdot \overline{dl} \qquad \text{(VI.12)}$$

VI.5 : L'électronvolt

Lorsqu'on étudie les énergies qui entrent en jeu au niveau moléculaire et atomique, on découvre que celles-ci sont extrêmement petites par rapport à l'unité d'énergie du SI, le joule. Comme il est peu pratique d'avoir à manipuler des puissances de 10, pour ce genre d'étude, on préfère travailler avec une autre unité d'énergie, plus petite, l'électron volt (eV).

Un électronvolt se définit comme l'énergie cinétique acquise par un électron accéléré par une différence de potentiel de 1 V.

Etant donné que la charge d'un électron vaut $1{,}6 \times 10^{-19}$ C (voir IV.1) et que U = qV (relation (VI.9)), on a :

$$\mathbf{1\ eV = 1{,}6 \times 10^{-19}\ C \times 1\ V = 1{,}6 \times 10^{-19}\ J} \qquad \text{(VI.13)}$$

Même si l'électronvolt peut s'avérer être une unité plus pratique à utiliser au niveau des particules, il ne faut pas oublier que ce n'est pas une unité du SI. Quand on effectue des calculs, il faut d'abord la convertir en Joule à l'aide du facteur de conversion ci-dessus.

VI.6 : Le potentiel électrique attribuable à une charge ponctuelle

Replaçons-nous dans le cas de la figure VI.1 et calculons le potentiel électrique V(r) à une distance r de la charge q_2 :

$$\mathbf{V(r) = \frac{U(r)}{q_1} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}},$$

en utilisant la relation (VI.7) qui implique qu'on ait choisi, comme niveau de référence, une énergie potentielle et un potentiel nuls à l'infini.

Effectivement :

$$\lim_{r\to\infty} V(r) = \lim_{r\to\infty} \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = 0$$

Dès lors, avec cette convention, le potentiel électrique à une distance r d'une charge ponctuelle Q, vaut :

$$\boxed{V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}} \qquad \text{(VI.14)}$$

Remarquons qu'il est positif si Q > 0, négatif dans le cas contraire.

VI.7 : Exercices

1. Un électron acquiert une énergie cinétique de $6{,}4 \times 10^{-16} J$ lorsqu'il subit une accélération due à un champ électrique en passant d'une plaque A à une plaque B. Quelle est la différence de potentiel entre les deux plaques? Laquelle possède le potentiel le plus élevé? (R : 4000 V ; V(B) > V(A))

2. Le potentiel à une certaine distance d'une charge ponctuelle est de 600 V et le champ électrique de $200 NC^{-1}$.

   a) Quelle est cette distance? (R: 3 m)

b) Que vaut cette charge? (R : $2 \times 10^{-7} C$)

3. La distance moyenne des protons dans un noyau atomique est d'environ 10^{-15} m. Estimer l'ordre de grandeur de l'énergie potentielle électrique de deux protons dans le noyau. Exprimer le résultat en J et en eV. (R : $2,3 \times 10^{-13} J$; $1,44 \times 10^{6} eV$)

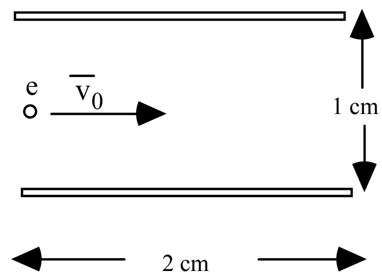
4. Une très grande ($\approx$ infinie) plaque métallique plane est à un potentiel V_0 . Elle porte une charge uniformément répartie d'une densité surfacique $\sigma(C/\mathrm{m}^2)$. Déterminez le potentiel à une distance x de la plaque (R: $V_0 - \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} x$).

5. Une particule alpha (2 protons, 2 neutrons) est envoyée avec une énergie cinétique de 4 MeV sur un noyau d'atome de mercure dont le nombre de protons est 80.
   a) Quelle est la distance d'approche minimale ? (R : $5,76 \times 10^{-14}\mathrm{m}$)
   b) Comparer avec la valeur du rayon nucléaire ($\approx 10^{-14}$ m).

6. (Examen de mai 2004) Soit deux charges électriques Q_1 = 2,5 µC et Q_2 = 2,5 µC situées respectivement aux points de coordonnées P_1 = (-3 m, 0), P_2 = (+3 m, 0).
   a. Calculer le champ électrique dû à ces deux charges au point P_3 de coordonnées P_3 = (0, 4 m), grandeur et direction.
   b. Quelle serait l'accélération initiale subie par un électron placé en P_3 (m_e = 9,11 x 10^{-31} kg, e = 1,6 x 10^{-19} C), grandeur et direction.
   c. Quel est le potentiel électrique dû aux charges Q_1 et Q_2 au point P_3 et en un point P_4 de coordonnées, P_4 = (6 m, 0), grandeur et signe.
   d. Quel est le travail de la force électrique lorsqu'on déplace l'électron de P_3 en P_4, grandeur et signe.

   (R: (a) E_3 = 1440 N/C, le long de l'axe y, sens positif (b) a = 2,5 x 10^{14} m/s², le long de l'axe y, sens négatif (c) V_3 = 9 kV; V_4 = 10 kV (d) W_{34} = +1,6 x 10^{-16} J)

7. La différence de potentiel entre deux plaques parallèles de 2 cm de long, séparées de 1 cm, est de 100 V.



Un électron est projeté avec une vitesse initiale v_0 de $10^7 ms^{-1}$ dans une direction perpendiculaire au champ. Quelle est la vitesse de l'électron (grandeur et direction) lorsqu'il émerge des plaques ($m_e = 9 \times 10^{-31} kg$)? (R : $1{,}1 \times 10^7 m / s$; 19,6° par rapport à l'horizontale)