CHAPITRE XII : L'induction électromagnétique et les inducteurs

Nous avons vu dans le chapitre XI qu'un courant produisait un champ magnétique. A la suite de cette observation, les scientifiques se sont demandé si, à l'inverse, un champ magnétique pouvait faire apparaître un courant. Quelque 10 ans plus tard, vers 1830, Joseph Henry et Michael Faraday ont confirmé cette hypothèse, chacun de leur côté. Le terme induction électromagnétique désigne la production de courants et donc de f.é.m. à partir de champs magnétiques ; on parle de courants induits et de f.é.m. induites. L'induction électromagnétique est à l'origine du fonctionnement des générateurs, des transformateurs et à la base de la production d'ondes électromagnétiques telles que, par exemple, la lumière et les ondes radio.

XII.1 : Les conditions pour créer des courants induits

Nous allons maintenant étudier quelles sont les conditions auxquelles un courant est induit à partir d'un champ magnétique.

c) Constatons tout d'abord qu'aucun courant n'est induit dans un conducteur immobile dans un champ magnétique constant.
d) Par contre lorsque le champ magnétique au travers d'une boucle de conducteur varie, un courant est induit dans la boucle.

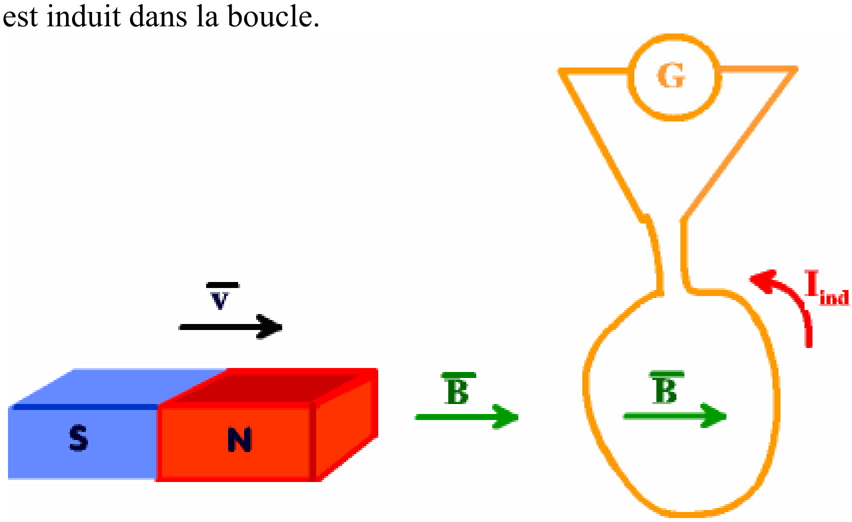


Figure XII.1.

Cet effet est illustré à la figure XII.1. En rapprochant l'aimant de la boucle de conducteur, le champ magnétique $\overline{B}$ qui traverse celle-ci augmente ; en effet, le champ magnétique produit par l'aimant diminue au fur et à mesure qu'on s'en éloigne. Suite à ce mouvement, un courant est induit dans la boucle et peut être observé à l'aide d'un galvanomètre, alors qu'il n'y a pas de pile dans le circuit ; ce courant a été induit par la variation de champ magnétique au travers de la boucle. Dès que l'aimant s'arrête, $\overline{B}$ cesse de varier et le courant s'annule. Lorsqu'on éloigne l'aimant de la boucle, un courant en sens inverse apparaît seulement pendant la durée du mouvement. Le même résultat peut être obtenu en laissant l'aimant immobile et en bougeant la boucle de courant.

c) Un courant est également induit dans une boucle de conducteur flexible, située dans un champ magnétique constant et uniforme, lorsqu'on modifie subitement l'aire délimitée par cette boucle, en tirant dessus par deux points diamétralement opposés ; cette aire se trouve ainsi réduite (voir figure XII.2). Le courant s'annule lorsque la déformation de la boucle s'arrête.

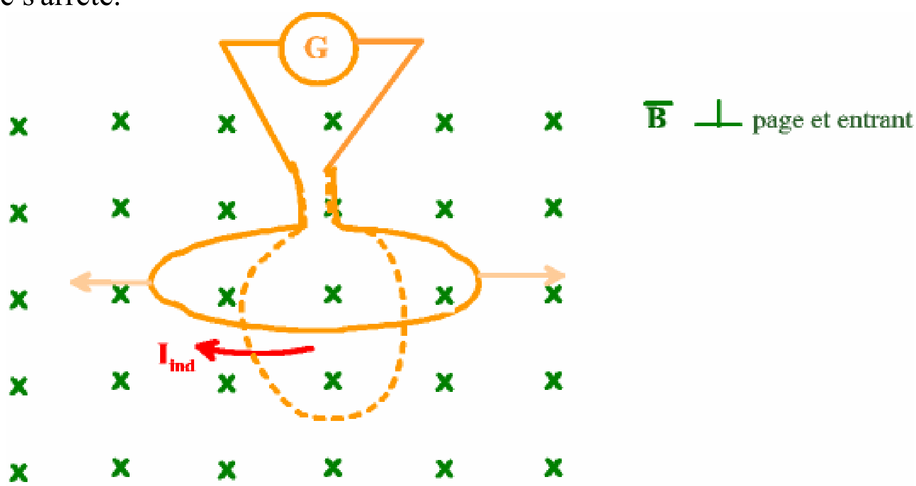


Figure XII.2.

d) Il est encore possible de faire apparaître un courant induit dans une boucle de conducteur d'aire constante, traversée par un champ magnétique constant et uniforme, en faisant tourner la boucle par rapport à la direction du champ (voir figure XII.3).

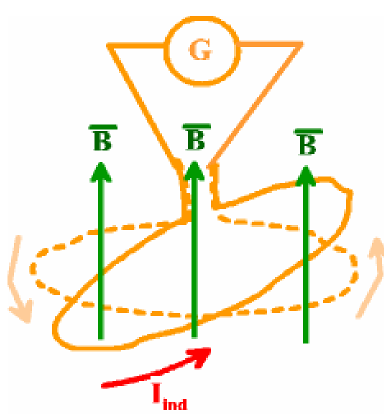


Figure XII.3.

XII.2 : La loi de Faraday et la loi de Lenz

Les observations faites à la section précédente s'expriment dans la loi de Faraday qui dit que l'intensité de la f.é.m. induite dans un circuit est donnée par la valeur absolue du taux de variation du flux magnétique, ϕ_B au travers de ce circuit :

$$\boxed{|\xi_{ind}| = \left|\frac{d\phi_B}{dt}\right|} \qquad \text{(XII.1)}$$

Le flux magnétique au travers d'une boucle plane se définit, dans le cas d'un champ magnétique uniforme, par :

$$\phi_B = A.B.\cos\theta \text{, pour } \overline{B} \text{ uniforme et boucle plane} \qquad \text{(XII.2)}$$

où A est l'aire de la boucle et θ est l'angle que fait le champ magnétique $\overline{B}$ avec la perpendiculaire à la surface de la boucle (voir figure XII.4).

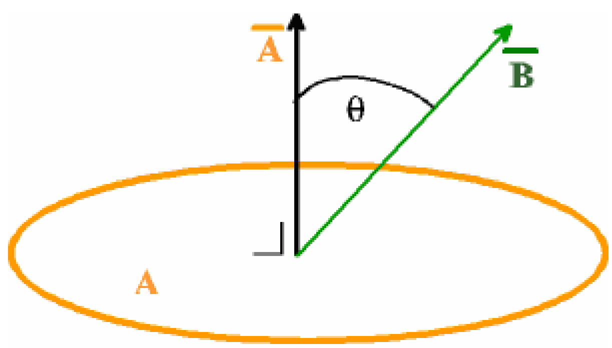


Figure XII.4.

En définissant le vecteur $\overline{A}$ comme un vecteur perpendiculaire à la boucle, de longueur A, on peut aussi écrire :

$$\boxed{\phi_B = \overline{A}.\overline{B} \text{, pour } \overline{B} \text{ uniforme et boucle plane}} \qquad \text{(XII.3)}$$

Avec la définition du flux magnétique donnée en (XII.2), la loi de Faraday exprimée par la relation (XII.1) implique bien que pour provoquer un courant induit et donc une f.é.m. induite, il faut soit une variation de B, soit une variation de A, soit une variation de θ ou toute combinaison de ces variations.

L'unité SI de flux magnétique est le weber (Wb). D'après la relation XII.2, un flux d'un weber est produit par un champ magnétique d'un tesla traversant perpendiculairement une surface de 1 m^2 .

$$\mathbf{1\ Wb \equiv 1\ T\ .\ 1\ m^2.}$$

Si le champ n'est pas uniforme ou si la surface considérée n'est pas plane, le flux magnétique au travers de la surface est donné par une intégrale :

$$\boxed{\phi_B \equiv \int \overline{B}\,.\,\overline{dA}} \qquad \text{(XII.4)}$$

La loi de Faraday telle qu'énoncée en (XII.1) permet de déterminer l'intensité de la f.é.m. induite et d'en déduire l'intensité du courant induit à l'aide de la loi d'Ohm :

$$I_{ind} = \frac{|\xi_{ind}|}{R},$$

où R est la résistance de la boucle de conducteur.

Pour déterminer le sens du courant induit, H.F. Lenz proposa une règle connue sous le nom de

<u>loi de Lenz</u> :

Le sens du courant induit est tel que le champ magnétique qu'il produit s'oppose à la variation de flux qui le produit.

Pour comprendre comment appliquer la loi de Lenz appliquons-la à la situation illustrée sur la figure XII.5.

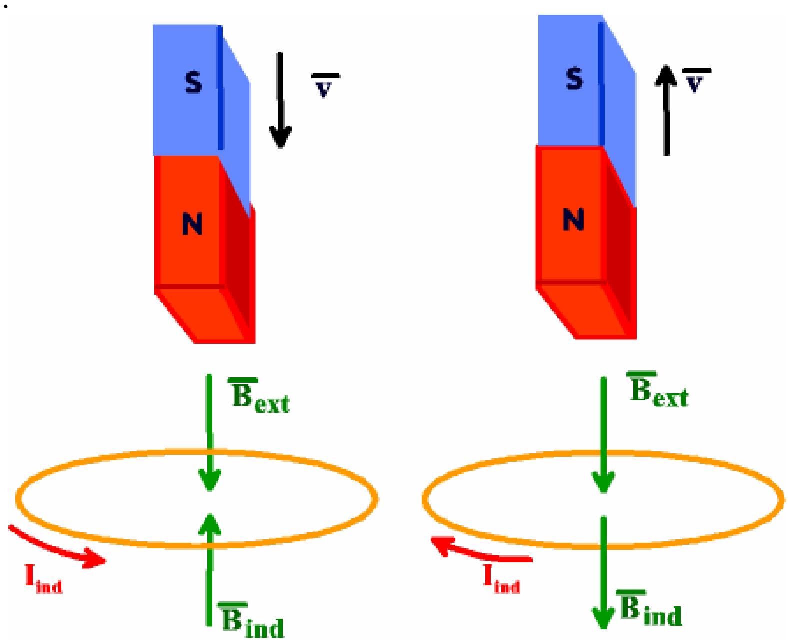


Figure XII.5.

En (a), l'aimant est rapproché de la boucle de conducteur, conduisant à une augmentation du champ magnétique extérieur, $\overline{B}_{ext}$, au travers de celle-ci et donc à une augmentation du flux magnétique. Le courant induit I_{ind} doit donc avoir un sens tel que le champ qu'il induit, $\overline{B}_{ind}$

provoque une diminution du flux magnétique. Dans le cas de la figure XII.5.b, l'aimant est éloigné, provoquant une diminution du flux magnétique. Le sens du courant induit doit donc être tel qu'il provoque un champ induit qui conduit à une augmentation du flux magnétique.

La loi de Lenz n'est en fait qu'une conséquence de la loi de conservation de l'énergie. En effet, dans le cas de la figure XII.5.a, si le champ magnétique induit venait renforcer le champ magnétique extérieur, ce champ supplémentaire entraînerait une augmentation du courant induit. Le courant plus intense provoquerait un champ induit plus intense, qui à son tour produirait un courant induit plus intense. Il est évident que cette croissance continuelle de la f.é.m. induite n'est pas possible sur le plan énergétique : un agent extérieur doit fournir l'énergie nécessaire à créer la f.é.m. induite.

Il est possible d'exprimer les lois de Faraday et de Lenz au moyen d'une seule expression, à condition d'adopter une convention pour le signe de ξ_{ind} et pour le sens du vecteur $\overline{A}$. Cette convention est illustrée à la figure XII.6.

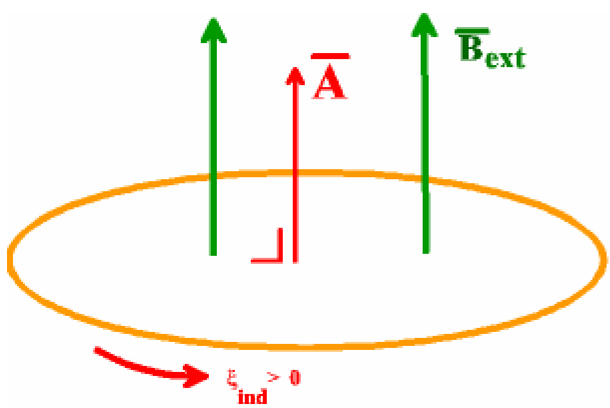


Figure XII.6.

Par convention, $\xi_{ind} > 0$ correspond à la f.é.m. qui produirait un courant donnant lieu à un champ magnétique de même sens que le champ extérieur $\overline{B}_{ext}$ et l'orientation du vecteur $\overline{A}$ est telle qu'elle conduit à un flux magnétique initial positif. Les lois de Faraday et de Lenz combinées s'énoncent alors :

$$\boxed{\xi_{ind} = -\frac{d\phi_B}{dt}} \qquad \text{(XII.5)}$$

Dans le cas d'un bobinage de N spires, si le flux magnétique traversant chaque spire est le même, ϕ_B, chaque spire est le siège d'une même f.é.m. induite donnée par la relation (XII.5) et ces N f.é.m. induites, placées en série, s'ajoutent pour donner la f.é.m. induite aux extrémités du conducteur formant le bobinage :

$$\boxed{\xi_{ind} = -N\frac{d\phi_B}{dt}} \tag{XII.6}$$

XII.3 : Les générateurs d'électricité

La principale application de la loi de Faraday est sans doute le générateur électrique ou dynamo ; il transforme de l'énergie mécanique en énergie électrique. La figure XII.7 illustre le schéma de principe d'un tel générateur.

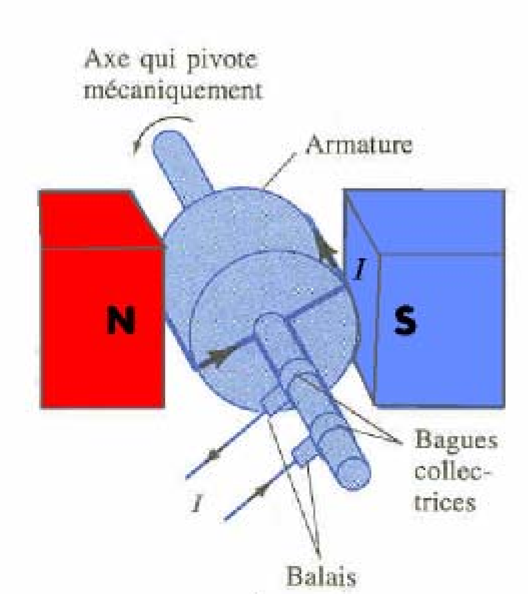


Figure XII.7.

L'énergie mécanique fournie au générateur fait tourner son axe et entraîne dans sa rotation une spire de conducteur (plusieurs en réalité) qui se met à tourner entre les pôles d'un aimant. Il en résulte une variation du flux magnétique au travers de la spire et par conséquent une f.é.m. et un courant sont induits dans le conducteur. Ce courant est collecté vers un circuit extérieur par l'intermédiaire de deux bagues sur lesquelles sont fixées les extrémités du conducteur formant la spire, et deux balais qui établissent le contact avec le circuit extérieur.

La f.é.m. induite dans un tel générateur peut être calculée à l'aide de la loi de Faraday (XII.5) :

$$\xi_{ind} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(A\,B\cos\theta\right),$$

où B est l'intensité du champ magnétique uniforme créé par l'aimant, A est l'aire de la spire et θ l'angle entre $\overline{B}$ et $\overline{A}$ (voir figure XII.8).

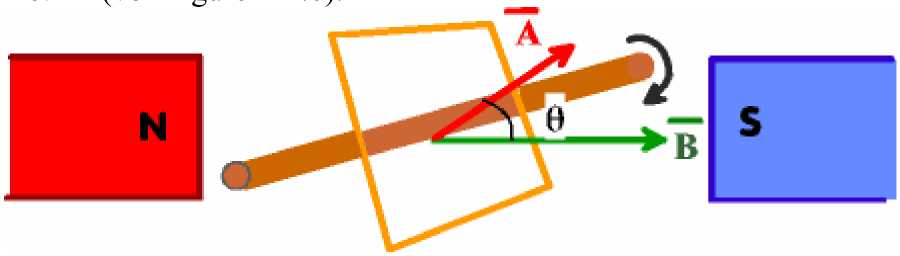


Figure XII.8.

Si le pivot du générateur est tourné avec une vitesse angulaire constante, ω, on a :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \text{constante.}$$

Donc $\theta = \omega t$

Dès lors :

$$\begin{aligned} \xi_{ind} &= -A\,.\,B\,\frac{d\cos\theta}{dt}, \quad \text{car A et B sont constants} \\ &= +A\,.\,B\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt} \\ &= A\,B\,\omega\sin(\omega t), \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$\xi_{ind} = \xi_0 \sin \omega t \qquad \text{(XII.7)}$$

On observe que la f.é.m. est une f.é.m. alternative qui varie de manière sinusoïdale avec le temps. Son amplitude vaut :

$$\xi_0 = A\,B\,\omega, \quad \text{dans le cas d'une seule spire}$$

et :

$$\xi_0 = N\,A\,B\,\omega, \quad \text{dans le cas d'un bobinage de N spires} \qquad \text{(XII.8)}$$

Ce que nous venons de voir explique pourquoi le courant domestique et industriel sont, le plus souvent alternatifs et sinusoïdaux : ils sont produits par la rotation de spires dans un aimant. Dans une centrale électrique située près d'un barrage, par exemple, c'est l'eau qui en tombant, entraîne des turbines. Celles-ci font tourner l'axe des spires. Dans les éoliennes, c'est le vent qui fait tourner des pales et l'axe des spires.

XII.4 : La force contre-électromotrice (f.c.é.m) des moteurs

Au chapitre XI, nous avons vu le principe du moteur électrique : lorsqu'un courant parcourt un bobinage monté sur pivot dans un champ magnétique, ce bobinage est soumis à un couple de forces qui le fait tourner. Lorsque les spires du bobinage se mettent à pivoter dans le champ magnétique, elles sont le siège d'une f.é.m. induite, comme dans le cas d'un générateur électrique ; cette f.é.m. induite s'oppose à la f.é.m. extérieure qui provoque le courant qui fait tourner le moteur ; on l'appelle la force contre-électomotrice (f.c.é.m.). La f.c.é.m. est proportionnelle à la vitesse angulaire ω du moteur (voir relation (XII.8)). Au démarrage, lorsque le moteur ne tourne pas encore, la f.c.é.m. est nulle et le courant est produit par le seule f.é.m. extérieure ; il est alors maximum. Le couple de forces intense qui en résulte met le moteur en marche ; il se met à tourner de plus en plus vite. La f.c.é.m. croît en conséquence, réduisant la f.é.m. effective et donc le courant dans le moteur :

$$\text{f.é.m.}_{\text{eff.}} = \text{f.é.m.}_{\text{ext.}} - \text{f.c.é.m.}$$

$$I = \text{f.é.m.}_{\text{eff.}} / R$$

Le couple de forces est plus faible et la vitesse angulaire croît moins vite jusqu'à atteindre une valeur constante lorsque le couple de forces s'annule. Si le moteur ne fournit aucun travail, cette situation est atteinte lorsque la f.c.é.m. compense exactement la f.é.m. extérieure. Le courant est alors nul.

Lorsque le moteur effectue un travail mécanique, entraînant par exemple les couteaux d'un moulin à café, il est ralenti (les grains de café exercent sur le moteur un couple de forces qui s'oppose à sa rotation). La diminution de la vitesse angulaire entraîne une diminution de la f.c.é.m. et par conséquent la f.é.m. nette augmente, ainsi que le courant dans le moteur. La puissance électrique fournie à ce moment par la f.é.m. extérieure est convertie en puissance mécanique par le moteur qui effectue un travail. Si le travail à effectuer est trop important, la f.c.é.m. diminue encore, conduisant à un courant accru qui risque de faire griller le moteur.

En fait, lorsqu'un moteur ne fournit pas de travail, un faible courant le parcourt, même lorsqu'il a atteint sa vitesse de rotation constante. En effet, les forces de frottement sur l'axe du moteur et les pertes par effet Joule dans le circuit électrique le ralentisse de sorte que la f.c.é.m. est légèrement inférieure à la f.é.m. extérieure, conduisant à une faible f.é.m. nette et donc à un faible courant.

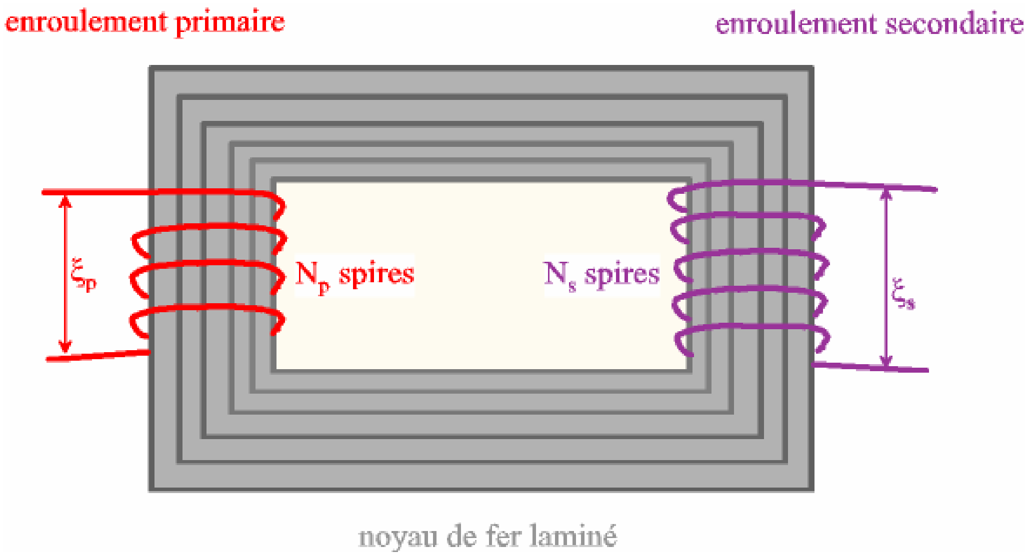


Figure XII.9.

XII.5 : Les transformateurs et le transport de l'énergie électrique

Un transformateur est un appareil servant à augmenter ou à diminuer une tension alternative. La figure XII.9 représente un transformateur simple constitué de deux bobines, enroulées sur un noyau de fer doux laminé qui les relie. La bobine primaire, reliée à la source qui fournit une f.é.m. ξ_p, comporte N_p spires, tandis que la bobine secondaire comporte N_s spires. La tension alternative ξ_p fait circuler dans le primaire un courant alternatif qui produit un flux magnétique variable ϕ_B dans chacune des spires. Le noyau de fer doux guide ce flux magnétique jusqu'aux spires de l'enroulement secondaire de sorte que d'après la loi de Faraday, une f.é.m. est induite aux bornes de l'enroulement secondaire :

$$\xi_s = -N_s \frac{d\phi_B}{dt} \tag{XII.9}$$

De même, le flux magnétique variable induit une f.c.é.m. aux bornes de l'enroulement primaire :

$$-N_p \frac{d\phi_B}{dt}$$

La loi des mailles, appliquée au circuit primaire, nous dit que la f.é.m. fournie par la source, ξ_p égale la tension aux bornes de l'enroulement primaire :

$$\xi_p = -N_p \frac{d\phi_B}{dt} \tag{XII.10}$$

En divisant les relations (XII.9) et (XII.10) membre à membre, on obtient :

$$\frac{\xi_s}{\xi_p} = \frac{N_s}{N_p} \tag{XII.11}$$

Le rapport des f.é.m. dans le primaire et dans le secondaire est égal au rapport de leur nombre de spires.

Lorsque N_s est supérieur à N_p, la tension du secondaire est supérieure à celle du primaire, on dit qu'on a un transformateur élévateur de tension ou survolteur. Dans le cas où N_s est inférieur à N_p, on parle de transformateur abaisseur de tension ou dévolteur.

Dans un schéma électrique, le transformateur est représenté par le symbole illustré à la figure XII.10.

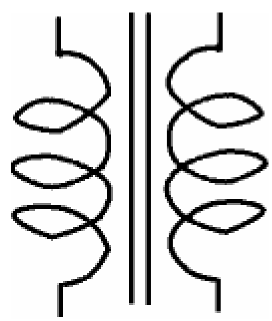


Figure XII.10.

Si on branche une résistance R aux bornes du secondaire, il y circulera un courant I_s. Si le transformateur est idéal, il y aura transfert complet de puissance entre le primaire et le secondaire :

$$P_s = P_p,$$

et donc :

$$\xi_s I_s = \xi_p I_p, \tag{XII.12}$$

où I_p est le courant dans le primaire. En combinant les relations (XII.11) et (XII.12), on obtient :

$$\frac{I_s}{I_p} = \frac{N_p}{N_s} \tag{XII.13}$$

Par conséquent, un transformateur élévateur de tension a pour effet de diminuer le courant dans le secondaire, tandis qu'un transformateur abaisseur de tension, augmente le courant.

C'est cette dernière propriété des transformateurs qui rend leur usage intéressant dans le transport de l'électricité depuis les centrales électriques vers les lieux d'utilisation. Au départ de la centrale la tension est élevée à l'aide d'un transformateur : le courant est transporté par des lignes à haute tension, typiquement quelques dizaines de milliers de volts. Le courant qui circule dans ces lignes à haute tension est par conséquent très faible, ce qui limite les pertes de puissance par effet Joule pendant le transport. Au voisinage des habitations, pour des raisons de sécurité notamment, un deuxième transformateur abaisse la tension, à une valeur efficace de 220 V en Belgique et dans les pays voisins.

XII.6 : L'inductance et les inducteurs

Un courant électrique produit un champ magnétique. Si le courant est variable, les variations de flux magnétique au travers du circuit lui-même (auto-induction) ou au travers d'un autre circuit situé à proximité (induction mutuelle) font apparaître, d'après la loi de Faraday, une f.é.m. induite.

Inductance Mutuelle

Lorsqu'on place deux bobines à proximité l'une de l'autre, comme sur la figure XII.11, un courant variable I_1 circulant dans la première crée un champ magnétique variable $\overline{B}_1$. Le flux variable de ce champ magnétique $\overline{B}_1$ au travers des spires du deuxième circuit, ϕ_{21}, induit une f.é.m., ξ_2, aux bornes de ce deuxième circuit :

$$\xi_2 = -N_2 \frac{d\phi_{21}}{dt} \qquad \text{(XII.14)}$$

où N_2 est le nombre de spires du deuxième circuit.

Le flux total de B_1 au travers du deuxième circuit est proportionnel au courant I_1 qui le créé :

$$N_2\, \phi_{21} \propto I_1$$

On pose :

$$N_2\, \phi_{21} = M\, I_1 , \qquad \text{(XII.15)}$$

où la constante de proportionnalité, M, est appelée inductance mutuelle (à ce stade, il faudrait écrire M_{21} mais on peut montrer que l'inductance mutuelle du circuit 2 sur le circuit 1, $M_{12} = M_{21} = M$).

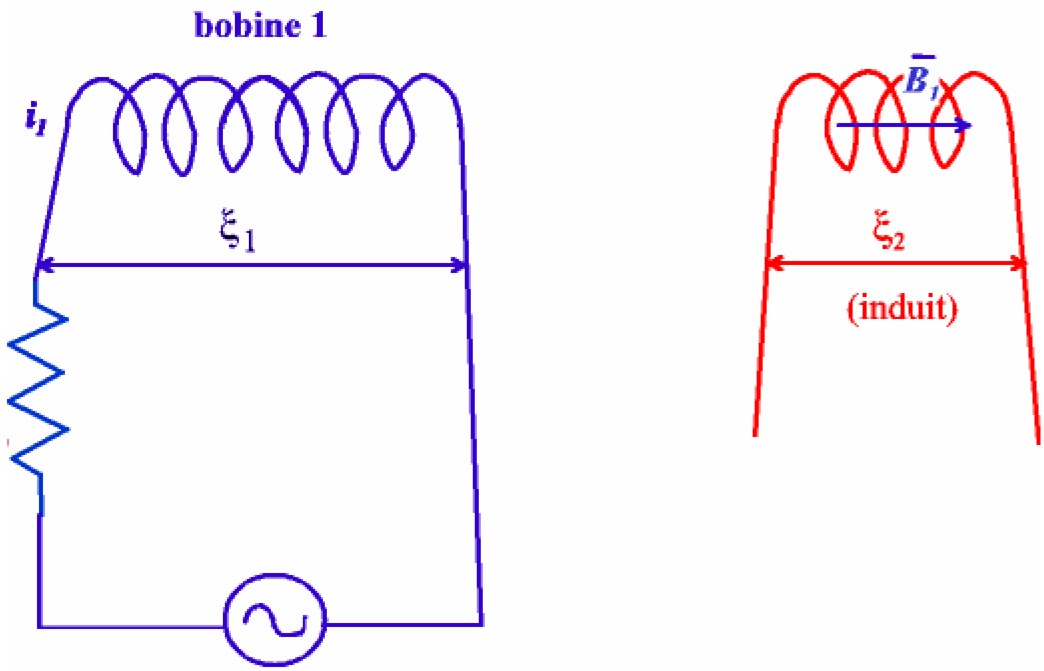


Figure XII.11.

En combinant (XII.14) et (XII.15), on a :

$$\boxed{\xi_2 = -M\, \frac{dI_1}{dt}} \qquad \text{(XII.16)}$$

L'inductance mutuelle de deux circuits dépend de leurs dimensions, de leur forme géométrique et de leurs positions relatives ; elle est indépendante des courants qui circulent dans les deux circuits. La relation (XII.16) a l'avantage de relier directement l'effet, la f.é.m. induite, à la cause, la variation de courant qui se mesure plus directement qu'une variation de flux.

Auto-inductance

De même, le courant variable qui circule dans un circuit, provoque un flux magnétique variable au travers de celui-ci et donc une f.é.m. induite :

$$\xi_1 = -N_1 \frac{d\phi_{11}}{dt}, \quad \text{(XII.17)}$$

et :

$$N_1 \phi_{11} = L I_1, \quad \text{(XII.18)}$$

où la constante de proportionnalité L est appelée auto-inductance. En combinant (XII.17) et (XII.18), on a :

$$\boxed{\xi_1 = -L \frac{dI_1}{dt}} \quad \text{(XII.19)}$$

L'auto-inductance d'un circuit dépend de ses dimensions et de sa forme géométrique. Elle est indépendante du courant qui circule dans le circuit et permet de relier directement la f.é.m. induite à la variation de ce courant.

L'unité SI d'inductance, que ce soit pour l'inductance mutuelle ou pour l'auto-inductance, est le henry (H). Les relations (XII.15) et (XII.18) montrent que l'inductance est un flux par unité de courant. Une inductance de un henry correspond au cas où un courant d'un ampère crée un flux magnétique d'un wéber :

$$1\ \mathrm{H} \equiv 1\ \mathrm{Wb/A} = 1\ \mathrm{V.s/A} \quad \text{(XII.20)}$$

Inducteur

On appelle inducteur un élément de circuit ayant une auto-inductance non négligeable ; il s'agit en général d'une bobine. Dans un schéma, l'inducteur se représente par le symbole :

XII.7 : Les circuits RL

Tout inducteur offre une certaine résistance au courant. On le représente généralement comme un inducteur idéal, de résistance nulle, en série avec une résistance R. Une résistance peut aussi être mise en série avec un inducteur. Dans les deux cas on se retrouve dans la situation schématisée à la figure XII.12.

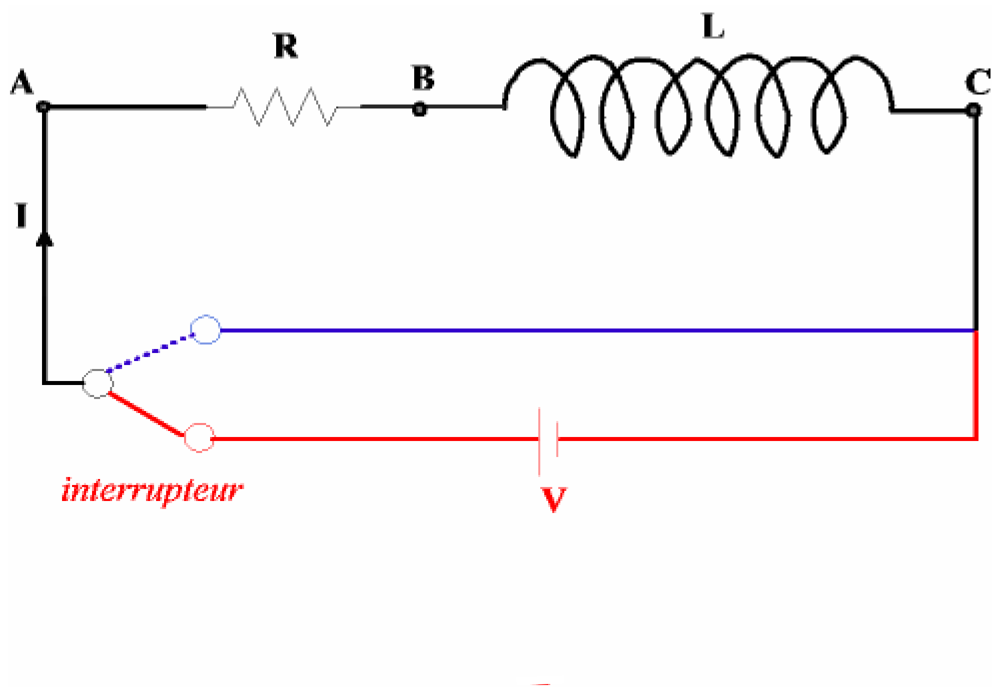


Figure XII.12.

Que se passe-t-il lorsqu'on alimente soudainement une telle combinaison avec une pile fournissant une différence de potentiel V (circuit rouge de la figure XII.12) . A l'instant t = 0, où on ferme l'interrupteur, le courant qui était nul tend à s'établir. Il y a donc une variation de courant ; celle-ci produit donc une f.é.m. induite aux bornes de l'inducteur : $V_{CB} = -L\,\frac{dI}{dt}$ (voir relation XII.19), qui s'oppose à celle de la pile qui produit le courant. La différence de potentiel aux bornes de la résistance est donnée par la loi d'Ohm : $V_{AB} = RI$. En appliquant la loi des mailles de Kirchhoff à ce circuit, on a :

$$\mathbf{V - L\,\frac{dI}{dt} = RI} \qquad \text{(XII.21)}$$

L'équation différentielle ci-dessus montre que tant que le courant varie, la différence de potentiel aux bornes de la résistance est inférieure à celle de la pile et le courant est inférieur à la valeur finale maximum I_{max} telle que :

$$\mathbf{V = R\,I_{max}}$$

Une fois cette valeur maximum atteinte, le courant est continu (dI = 0), la différence de potentiel aux bornes de l'inducteur est nulle. Le rôle de l'inducteur est donc de retarder l'établissement du courant I_{max} = V/R qui s'établirait immédiatement en l'absence d'inducteur. Une fois la valeur I_{max} atteinte, l'inducteur n'a plus d'effet, le courant étant continu.

Pour vérifier cela, résolvons l'équation (XII.21), en séparant les variables t et I :

$$\frac{dI}{V - IR} = \frac{dt}{L}$$

et en intégrant :

$$\int_0^I \frac{dI'}{V - I'R} = \int_0^t \frac{dt}{L},$$

ce qui donne :

$$-\frac{1}{R}\ln\left(\frac{V - IR}{V}\right) = \frac{t}{L},$$

ou encore, en posant $\tau = L/R$:

$$\boxed{I = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)} \qquad \text{(XII.22)}$$

La dépendance de I en fonction du temps obtenue ci-dessus est illustrée à la figure XII.13.a. Elle montre que le courant tend effectivement vers I_{max} = V/R, lorsque t tend vers l'infini. La constante de temps τ = L/R, joue le même rôle que la constante de temps τ = RC dans les circuits RC : au bout d'un temps t = L/R, le courant atteint 63% de sa valeur maximum.

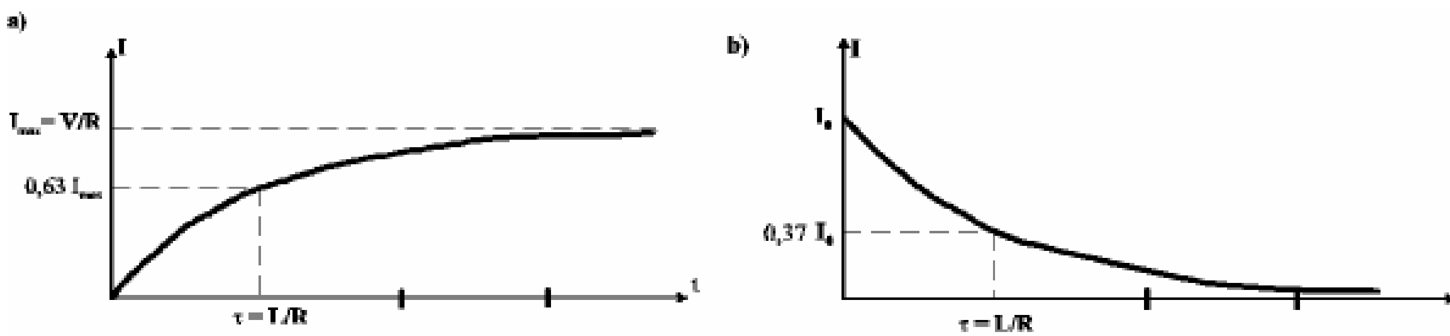


Figure XII.13.

Lorsqu'on fait basculer l'interrupteur de la figure XII.12, on obtient le circuit bleu dans lequel la pile a été soudainement retirée. A cet instant initial, t = 0, I = I_0 et la loi des mailles donne (XII.22 avec V = 0) :

$$\mathbf{L\,\frac{dI}{dt} + RI = 0}. \qquad \text{(XII.23)}$$

En séparant les variables et en intégrant, on obtient :

$$\int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = -\int_0^t \frac{R}{L}\,dt\,,$$

ce qui donne :

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L}\,t\,,$$

ou encore :

$$\boxed{\mathbf{I = I_0\,e^{-t/\tau}}}\,, \qquad \text{(XII.24)}$$

où τ = L/R désigne à nouveau la constante de temps du circuit. La relation (XII.24) est illustrée à la figure XII.13.b. On voit que le courant tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. Au bout d'un temps t = L/R, il n'a déjà plus que 37% de sa valeur initiale. A nouveau le rôle de l'inducteur est de retarder la suppression du courant qui serait immédiate si on retirait la pile dans un circuit où seule se trouve une résistance.

XII.8 : L'énergie emmagasinée dans un inducteur

Lorsqu'un élément de circuit d'inductance L est parcouru par un courant variable I, il reçoit de l'énergie à un taux :

$$\mathbf{P = I\xi = -L\,I\,\frac{dI}{dt}}\,,$$

en utilisant la relation (XII.19). Pour calculer le travail requis pour faire croître le courant dans un inducteur de zéro à I, on calcule le travail infinitésimal effectué pendant un temps dt, pour faire passer le courant de I à I + dI :

$$\mathbf{dW = P\ dt = LI\ dI}$$

Pour trouver le travail total, on intègre l'expression ci-dessus de zéro à la valeur finale du courant :

$$\mathbf{W = \int dW = \int_0^I LI'dI' = \frac{1}{2} LI^2}\ .$$

Ce travail correspond à l'énergie U emmagasinée à l'intérieur de l'inducteur transportant un courant I, en posant U = 0, lorsque I = 0 :

$$\boxed{\mathbf{U = \frac{1}{2}\ LI^2}} \qquad \text{(XII.25)}$$

XII.9 : Les circuits LC et les oscillations électromagnétiques

Après avoir étudié les circuits RC et RL, voyons ce qui peut se produire dans un circuit idéal, où on peut négliger toute résistance et où seuls se trouvent un condensateur de capacitance C et un inducteur d'inductance L (voir XII.14).

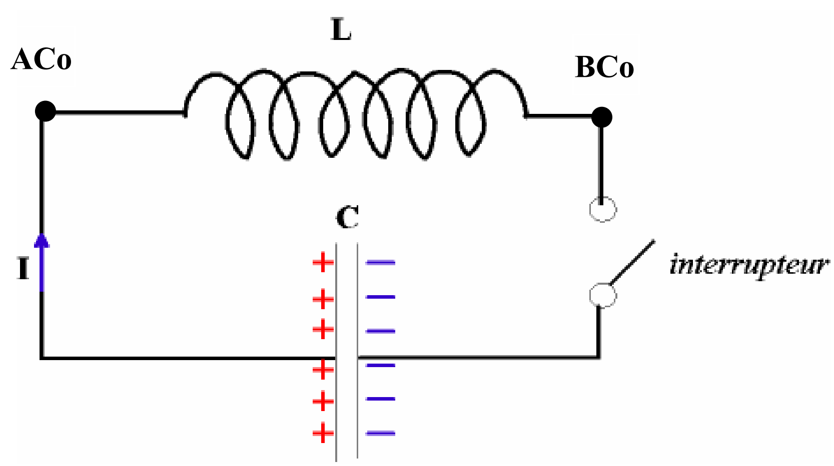


Figure XII.14.

Supposons que le condensateur soit initialement chargé et que ses armatures portent une charge Q_0 à l'instant t = 0 où on ferme l'interrupteur. Le courant qui était nul tend à s'établir dans le sens indiqué sur la figure. Il y a donc une variation de courant qui produit une f.é.m. induite aux bornes de l'inducteur : $\mathbf{V_{BA} = -L\,\frac{dI}{dt}}$, qui s'oppose à celle de la source de courant, ici, le condensateur chargé. En appliquent la loi des mailles au circuit fermé, on a :

$$\mathbf{\frac{Q}{C} = L\,\frac{dI}{dt}} \qquad \text{(XII.26)}$$

Le courant est donné par $I = -\frac{dQ}{dt}$ car le courant I qui s'écoule de la plaque positive du condensateur vers la plaque négative (voir figure XII.14) fait décroître la charge du condensateur : $dQ < 0$. Le signe moins permet d'obtenir $I > 0$, comme il se doit. Dès lors, en remplaçant dans XII.26, on obtient :

$$\mathbf{\frac{d^2Q}{dt} + \frac{1}{LC}\,Q = 0} \qquad \text{(XII.27)}$$

En dérivant deux fois et en remplaçant dans l'équation ci-dessus, on peut vérifier aisément que :

$$\mathbf{Q(t) = Q_0 \cos(\omega t + \phi)} \qquad \text{(XII.28)}$$

est une solution de cette équation, pour :

$$\omega = \sqrt{\mathbf{\frac{1}{LC}}}\,; \qquad \text{(XII.29)}$$

ω est appelée fréquence angulaire, Q_0 est l'amplitude et ϕ la phase. Ces deux dernières constantes sont fixées par les conditions initiales. Le courant est obtenu en dérivant l'expression (XII.28) :

$$\mathbf{I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \omega\, Q_0 \sin(\omega t + \phi)} \qquad \text{(XII.30)}$$

Les variations de Q et de I en fonction du temps, données par les expressions (XII.28) et (XII.30), sont illustrées à la figure XII.15 dans le cas où la phase ϕ est nulle.

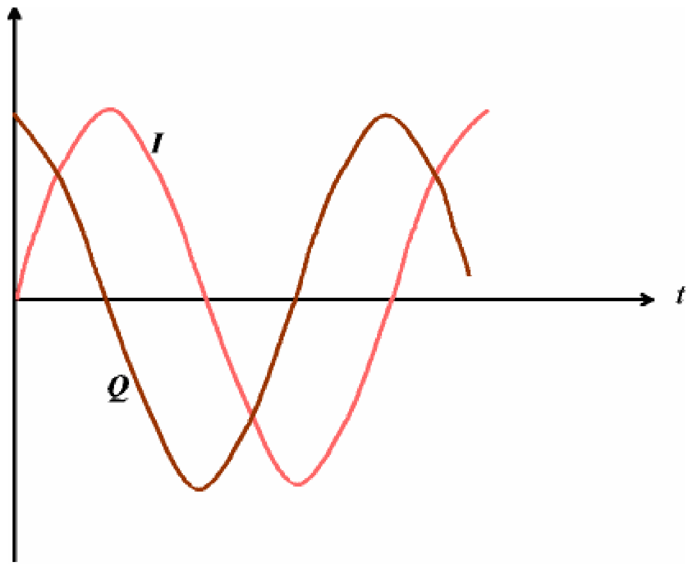


Figure XII.15.

On voit que les deux variables oscillent entre leur valeur maximum, $+Q_0$ pour la charge, $I_0 = \omega Q_0$, pour le courant et leur valeur minimum, $-Q_0$ et $-I_0$ respectivement. Elles oscillent à la même fréquence :

$$\mathbf{f} = \frac{\omega}{2\pi}, \qquad \text{(XII.31)}$$

mais sont déphasées d'un angle $\frac{\pi}{2}$: le courant s'annule lorsque la charge passe par un extrémum ; la charge s'annule lorsque le courant passe par un extrémum.

Ces expressions, (XII.28) et (XII.30), traduisent l'oscillation de la charge Q_0 d'une armature à l'autre du condensateur, au travers de l'inducteur. Au moment où dans la situation illustrée à la figure XII.14, on ferme l'interrupteur, l'armature de gauche porte une charge $+Q_0$, celle de droite, $-Q_0$; le courant initialement nul se met à croître dans le sens positif indiqué par la flèche et le condensateur se décharge progressivement. Lorsqu'il est totalement déchargé, le courant a atteint sa valeur maximum, I_0 et continue de faire passer des charges positives de l'armature de gauche à celle de droite. Il se met à décroître et s'annule lorsque c'est l'armature de droite cette fois qui porte une charge $+Q_0$ et celle de gauche une charge $-Q_0$. Ensuite les charges positives repartent en sens opposé, vers l'armature de gauche et le courant devient négatif, puisqu'en sens inverse de la flèche sur la figure XII.14.

Ces oscillations de la charge d'une armature à l'autre du condensateur correspondent à un transfert de l'énergie emmagasinée dans le condensateur, $U_C = \frac{1}{2} Q^2 / C$, à celle contenue dans l'inducteur, $U_L = \frac{1}{2} L I^2$ et réciproquement. L'énergie totale à chaque instant est conservée :

$$\mathbf{U_{tot}} = \mathbf{U_C + U_L}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{Q_0^2 \cos^2(\omega t + \phi)}{C} + L Q_0^2\, \omega^2 \sin^2(\omega t + \phi)\right] .$$

En remplaçant $\omega^2 = 1/LC$ et en mettant en évidence, on obtient :

$$\mathbf{U_{tot}} = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}\left[\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)\right] .$$

Donc :

$$\boxed{\mathbf{U_{tot}} = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C} = \frac{1}{2} L\, I_0^2} \qquad \text{(XII.32)}$$

C'est l'énergie totale initiale entièrement stockée dans le condensateur, le courant étant nul à cet instant. Lorsque le condensateur est déchargé et que le courant est maximum (dans un sens ou dans l'autre), toute l'énergie se retrouve dans l'inducteur. Ces oscillations de l'énergie entre le condensateur et l'inducteur sont illustrées à la figure XII.16.

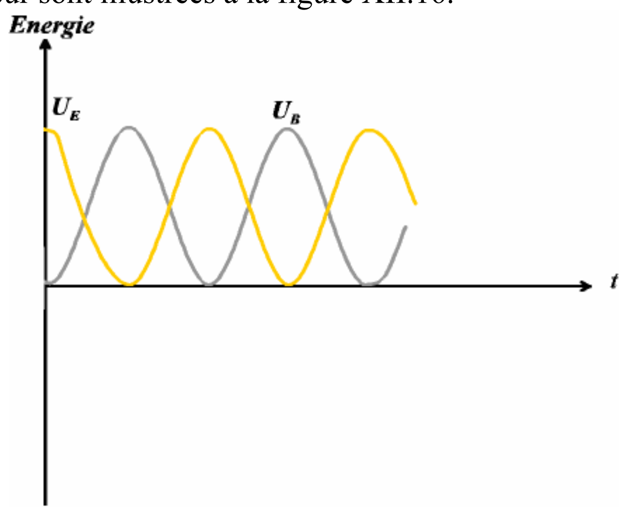
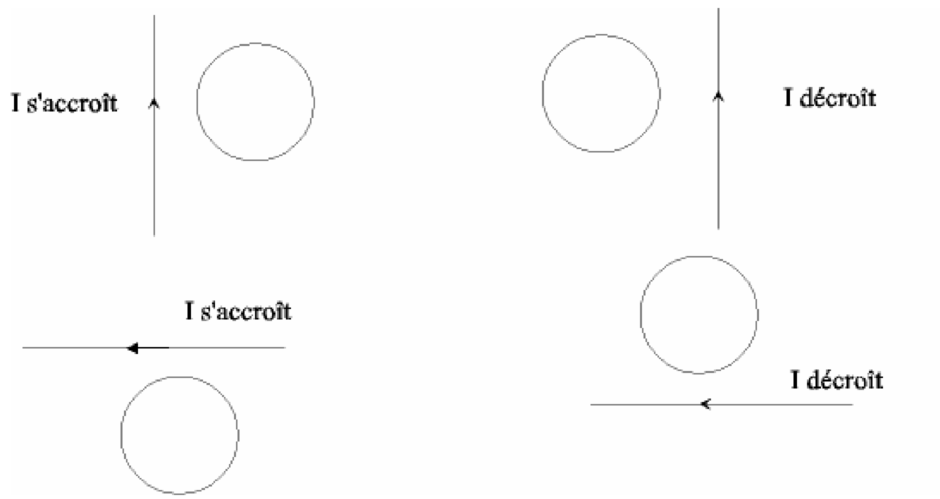


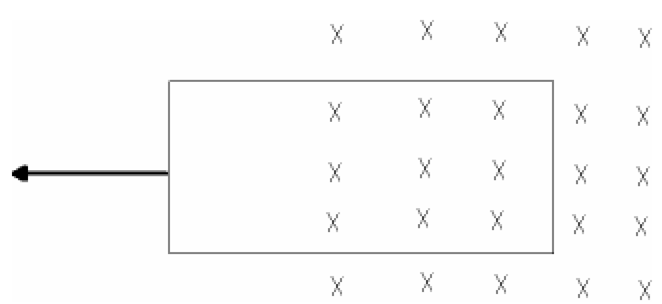
Figure XII.16.

XII.10 : Exercices

1. Donnez la direction du courant induit dans chacune des boucles circulaires ci-dessous sachant qu'il est attribuable au courant indiqué dans chaque partie du schéma.

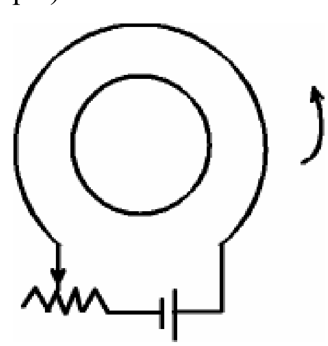


2. On tire la boucle de conducteur rectangulaire, représentée ci-dessous, vers la gauche, hors du champ magnétique uniforme et constant qui s'oriente vers l'intérieur de la page :



   Déterminez le sens dans lequel y circule le courant induit. (R : sens horlogique).

3. En supposant qu'on accroît lentement la valeur de la résistance de la figure, déterminez la direction du courant induit dans la petite boucle circulaire placée à l'intérieur de la grande boucle. (R : sens trigonométrique).



4. Une boucle de fil circulaire de 10 cm de rayon a une résistance de 150 Ω. Au départ, elle se trouve à l'intérieur d'un champ magnétique d'une intensité de 0,40 T, dans un plan perpendiculaire à $\overline{B}$, mais on l'en retire en 100 ms. Calculez l'énergie électrique dissipée au cours de cette opération. (R = 1,05 10^{-4} J).

5. Le flux magnétique qui traverse chacune des 60 spires d'une bobine correspond à : $(8{,}8\ t - 0{,}51t^3) \times 10^{-2}$ T.m^2, où le temps t est donné en secondes. Déterminez : a) la f.é.m. ξ en fonction du temps et b) sa valeur à t = 1,0 s et à t = 5,0 s.
(R : a) $(-5{,}3 + 0{,}92\ t^2)$ V ; b) -4,4 V à t = 1,0 s et +18 V à t = 5,0 s).

6. La f.c.é.m. d'un moteur vaut 80 V lorsqu'il tourne à 1200 r/min. Déterminez sa valeur à 1800 r/min si le champ magnétique ne varie pas. (R : 120 V).

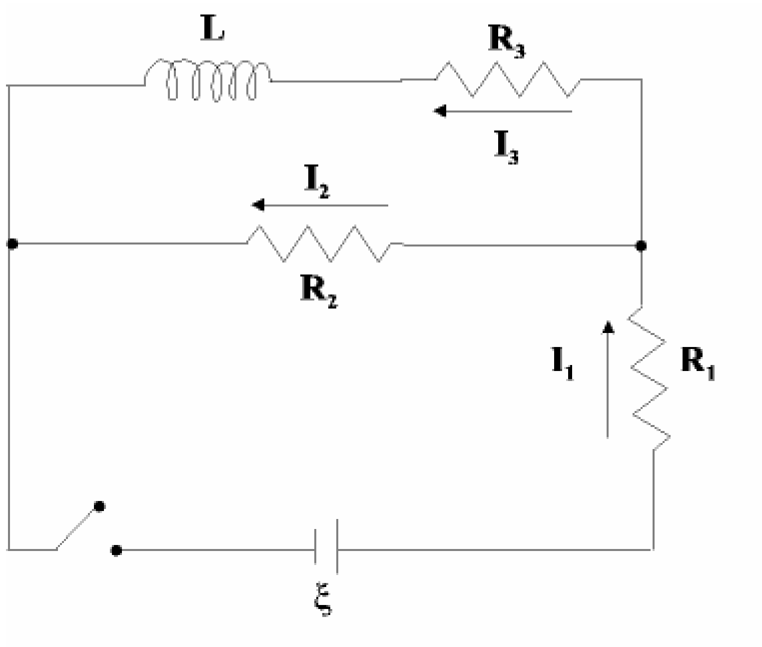
7. Un transformateur survolteur augmente une tension de 80 V jusqu'à 240 V. Déterminez le rapport entre les courants qui parcourent les enroulements secondaire et primaire, en supposant une efficacité de 100%. (R : 1/3).

8. Quand on applique une tension de 120 V à un transformateur comportant 1800 spires d'enroulement primaire et 120 spires d'enroulement secondaire, il produit un courant de 8,0 A. Déterminez la tension aux bornes du secondaire et le courant qui parcourt le primaire. (R : 8 V ; 0,53 A).

9. Déterminez la f.é.m. induite lorsque le courant qui parcourt une bobine de 180 mH varie de façon constante de 20,0 mA à 28,0 mA en 240 ms. (R : $6{,}0 \times 10^{-3}$ V).

10. Dans un circuit RL, le courant met 1,56 ms à augmenter de zéro à la moitié de sa valeur maximale. Déterminez a) la constante de temps du circuit et b) sa résistance lorsque L = 310 H. (R : a) 2,25 ms ; b) $1{,}38 \times 10^5\ \Omega$).

11. Pour le circuit de la figure ci-dessous, déterminez le courant qui parcourt chaque résistance (I_1, I_2, I_3) a) au moment où on ferme l'interrupteur et b) longtemps après cette fermeture. En supposant qu'au bout d'un long intervalle de temps, on ouvre à nouveau l'interrupteur, déterminez l'intensité du courant dans chaque résistance c) immédiatement après l'ouverture du circuit et d) longtemps après. (R: a) $I_3 = 0$; $I_1 = I_2 = \xi / (R_1 + R_2)$; b) comme si L n'existait pas: $I_1 = \xi / (R_1 + R_2 \| R_3)$; $I_2 = I_1 / (1 + R_2/R_3)$; $I_3 = I_1\ (1 + R_3/R_2)$ ou $I_3 = I_1 - I_2$; c) $I_1 = 0$; $I_2 = I_3 = I_3$ obtenu en (b); d) $I_1 = I_2 = I_3$.)



12. On charge un condensateur d'une capacité de 660 pF jusqu'à une tension de 100 V puis on le branche rapidement à un inducteur de 75 mH. Déterminez a) la fréquence d'oscillation de ce circuit, b) la valeur maximale du courant qui y circule et c) l'énergie maximale emmagasinée dans le champ magnétique de l'inducteur. (R: a) $f = 2{,}26 \times 10^4$ Hz; b) $I_{max} = 9{,}37$ mA; c) $U^L{}_{max} = 3{,}29$ µJ)